Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$

et la relation de récurrence : $u_{n+1}=\frac{nu_n+1}{2(n+1)}$

Partie A- Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_n de la suite, un élève propose l'algorithme ci-dessous.
Il a oublié de compléter deux lignes.

```
Variables :        n est un entier naturel
                   u  est un réel

Initialisation :   Affecter àn la valeur 1
                   Affecter à u la valeur 1,5

Traitement :       Tant que n < 9
                       Affecter à u la valeur . . .
                       Affecter à n la valeur . . .
                   Fin Tant que

Sortie :           Afficher la valeur de n
```

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.

2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 à u_9 ?

3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1.5	0.625	0.375	0.2656	0.2063	0.1693	...	0.0102	0.0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B- Etude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier n ⩾ 1, $v_n=nu_n-1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n ⩾ 1, on a : $u_n=\frac{1+(0,5)^n}{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4. Justifier que, pour tout entier n ⩾ 1, on a : $u_{n+1}-u_n=-\frac{1+(1+0{,}5n)(0{,}5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Partie C-Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0{,}001$.

CORRECTION

Partie A

1. Affecter à u la valeur : $\frac{nu+1}{2(n+1)}$

Affecter à n la valeur : $n+1$

2. Il suffit d'écrire l'instruction : **Afficher la variable u** avant l'instruction : Fin Tant que.

3. Conjectures

(u_n) est une suite décroissante

(u_n) converge vers 0.

Partie B

Pour tout entier naturel non nul n :

$$v_n=nu_n-1$$

1. Pour tout entier naturel non nul n :

$$v_{n+1}=(n+1)u_{n+1}-1=(n+1)\left[\frac{nu_n+1}{2(n+1)}\right]-1=\frac{nu_n+1}{2}-1=\frac{1}{2}(nu_n-1)=\frac{1}{2}v_n$$

$$v_1=1\times u_1-1=0{,}5$$

(v_n) **est la suite géométrique de premier terme** v_1 **= 0,5 et de raison q =** $\frac{1}{2}$ **= 0,5.**

2. pour tout entier naturel non nul n :

$v_n=(0{,}5)^n$ et $nu_n-1=(0{,}5)^n$ donc $u_n=\frac{1+(0{,}5)^n}{n}$

3. $0<0{,}5<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(0{,}5)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ **= 0.**

4. Pour tout entier naturel non nul n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1+(0{,}5)^{n+1}}{n+1}-\frac{1+(0{,}5)^n}{n}=\frac{n+n(0{,}5)^{n+1}-n-1-(n+1)(0{,}5)^n}{(n+1)n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-1+[0{,}5n-n-1](0{,}5)^n}{(n+1)n}=\frac{-1+(-0{,}5n-1)(0{,}5)^n}{(n+1)n}$$

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{1+(0{,}5n+1)(0{,}5)^n}{(n+1)n}$$

donc $u_{n+1}-u_n<0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Partie C

Variables n est un entier naturel
u est un réel

Initialisation Affecter à n la valeur 1
Affecter à u la valeur 1,5

Traitement Tant que $u \geqslant 0{,}001$
Affecter à u la valeur $\frac{nu+1}{2(n+1)}$
Affecter à n la valeur n+1
Fin Tant que

Sortie Afficher la variable **n**