Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur les îles A et B d'un archipel.
Au début de l'année 2013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce sont présents sur l'île A et 10 millions sur l'île B.

Des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès, et migrations entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes :

- sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 30 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente ;
- sur l'île B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.

Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement B) au début de l'année $(2013+n)$.

Partie A – Algorithmique et conjectures

On donne ci-après un algorithme qui doit afficher le nombres d'oiseaux vivant sur chacune des deux îles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

Début de l'algorithme

```
Lire n
Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013
Afficher i
Afficher a
Afficher b
Tant que i < n faire
    Affecter à c la valeur (0,8a+0,3b)
    Affecter à b la valeur (0,2a+0,7b)
    Affecter à a la valeur c
Fin Tant que
```

Fin de l'algorithme

1. Cet algorithme comporte des oublis dans le traitement. Repérer ces oublis et les corriger.

2. On donne ci-après une copie d'écran des résultats obtenus après avoir corrigé l'algorithme précédent dans un logiciel d'algorithmique, l'utilisateur ayant choisi l'année 2020.

★★★ Algorithme lancé ★★★
En l'année 2013,a prend la valeur 20 et b prend la valeur 10
En l'année 2014,a prend la valeur 19 et b prend la valeur 11
En i'année 2015,a prend la valeur 18.5 et b prend la valeur 11.5
En i'année 2016,a prend la valeur 18.25 et b prend la valeur 17.75
En l'année 2017,a prend la valeur 18.125 et b prend la valeur 11.875
En l'année 2018,a prend la valeur 18.0425 et b prend la valeur11.9375
En l'année 2019,a prend la valeur 18.03125 et b prend la valeur 11.96875
En l'année 2020,a prend la valeur 18.015625 et b prend la valeur 11.984375
★★★ Algorithme terminé ★★★

Au vu des résultats,émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suites (a_n) et (b_n) .

Partie B – Etude mathématique

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=MU_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.
On admet alors que $U_n=M^n U_0$ pour tout entier naturel n ⩾ **1**

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que, pour tout entier naturel n ⩾ **1**

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,5^n & 0,6-0,6\times 0,5^n \\ 0,4-0,4\times 0,5^n & 0,4+0,6\times 0,5^n \end{pmatrix}$$

On ne détaillera le calcul que pour le premier des coefficients de la matrice $M^{n.}$

3 . Exprimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel n ⩾ 1.

4. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser ? Si oui , préciser vers quelle valeur.

CORRECTION

Partie A

1. Remarques :

Pour l'algorithme proposé il ne sera affiché que : 2013 pour i, 20 pour a et 10 pour b.
Il faut ajouter une instruction pour faire varier i.
Il faut aussi changer l'ordre de certaines instructions.
On peut aussi préciser les variables avant les initialisations.

Proposition d'algorithme corrigé

Variables : n est un entier naturel supérieur ou égal à 2013
i est un entier naturel
a,b et c sont des nombres réels

Initialisation : Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013

Traitement : Lire n
Tant que i < n faire
Affecter à i la valeur : i+1
Afficher i
Affecter à c la valeur : (0,8a+0,3b)
Affecter à b la valeur : (0,2a+0,7b)
Affecter à a la valeur c
Afficher a
Afficher b
Fin Tant que

2. **Conjectures :**

(a_n) est une suite décroissante
(a_n) converge vers 18
(b_n) est une suite croissante
(b_n) converge vers 12

Partie B

n est un entier naturel
a_n est le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île A au début de l'année $(2013+n)$
$a_0=20$.
b_n est le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île B au début de l'année $(2013+n)$
$b_0=10$.

Pour l'année : $(2013+n+1)$

$0{,}8\,a_n$ est le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île A au début de $(2013+n+1)$ qui étaient présents au début de $(2013+n)$ sur l'île A ; $0{,}3\,b_n$ est le nombre d'oiseaux(en millions) présents sur l'île A au début de $(2013+n+1)$ qui étaient présents au début de $(2013+n)$ sur l'île B donc $a_{n+1}=0{,}8\,a_n+0{,}3\,b_n$.

$0{,}2\,a_n$ est le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île B au début de $(2013+n+1)$ qui étaient présents au début de $2013+n$ sur l'île A ; $0{,}7\,b_n$ est le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île B au début de $(2013+n+1)$ qui étaient présents au début de $(2013+n)$ sur l'île B donc $0{,}2\,a_n+0{,}7\,b_n$.

$$\begin{cases} a_{n+1}=0{,}8\,a_n+0{,}3\,b_n \\ b_{n+1}=0{,}2\,a_n+0{,}7\,b_n \end{cases}$$

On obtient par notation matricielle.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{U}_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \mathrm{U}_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{MU}_n$$

On admet que : $\mathrm{U}_n=\mathrm{M}^n\mathrm{U}_0$

(On peut facilement justifier ce résultat en utilisant un raisonnement par récurrence).

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel non nul : $\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times0{,}5^n & 0{,}6-0{,}6\times0{,}5^n \\ 0{,}4-0{,}4\times0{,}5^n & 0{,}4+0{,}6\times0{,}5^n \end{pmatrix}$.

. <u>Initialisation</u>

Pour n = 1 $\quad \mathrm{M}^1=\mathrm{M}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times0{,}5 & 0{,}6-0{,}6\times0{,}5 \\ 0{,}4-0{,}4\times0{,}5 & 0{,}4+0{,}6\times0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \mathrm{M}$$

. <u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul, on suppose que : $\mathrm{M}^n=\begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times0{,}5^n & 0{,}6-0{,}6\times0{,}5^n \\ 0{,}4-0{,}4\times0{,}5^n & 0{,}4+0{,}6\times0{,}5^n \end{pmatrix}$ et on doit démontrer que :

$$\mathrm{M}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times0{,}5^{n+1} & 0{,}6-0{,}6\times0{,}5^{n+1} \\ 0{,}4-0{,}4\times0{,}5^{n+1} & 0{,}4+0{,}6\times0{,}5^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Or $\mathrm{M}^{n+1}=\mathrm{M}^n\times\mathrm{M}$

$$\mathrm{M}^n\times\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times0{,}5^n & 0{,}6-0{,}6\times0{,}5^n \\ 0{,}4-0{,}4\times0{,}5^n & 0{,}4+0{,}6\times0{,}5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

On nous demande de calculer seulement le premier coefficient

$$(0{,}6+0{,}4\times0{,}5^n)\times0{,}8+(0{,}6-0{,}6\times0{,}5^n)\times0{,}2=0{,}48+0{,}32\times0{,}5^n+0{,}12-0{,}12\times0{,}5^n=0{,}6+0{,}20\times0{,}5^n$$

on a $0{,}20=0{,}4\times0{,}5$ donc

$$(0{,}6+0{,}4\times0{,}5^n)\times0{,}8+(0{,}6-0{,}6\times0{,}5^n)\times0{,}2=0{,}6+0{,}4\times0{,}5\times0{,}5^n = 0{,}6+0{,}4\times0{,}5^{n+1}$$

. <u>conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel non nul on a :

$$\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}6 - 0{,}6\times 0{,}5^n \\ 0{,}4 - 0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}4 + 0{,}6\times 0{,}5^n \end{pmatrix}$$

3. $\mathrm{U}_n=\mathrm{M}^n\mathrm{U}_0$ or $\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc

$$a_n=(0{,}6+0{,}4\times 0{,}5^n)\times 20+(0{,}6-0{,}6\times 0{,}5^5)\times 10=12+8\times 0{,}5^n+6-6\times 0{,}5^n=18+2\times 0{,}5^n$$

$$a_n=18+2\times 0{,}5^n$$

4. $0 \leqslant 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 18$

Dans un futur lointain, le nombre d'oiseaux de l'île A se stabilisera environ 18 (millions).