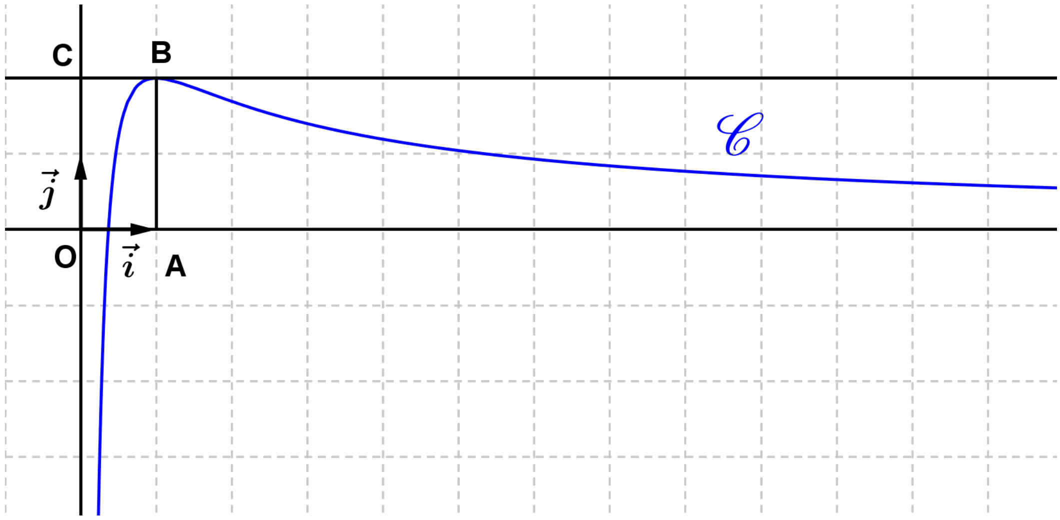
Exercice 2 7 points

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle]0;+∞[.



On dispose des informations suivantes :

- les points A,B,C ont pour coordonnées respectives $(1{,}0),(1{,}2),(0{,}2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x)=\frac{a+b\ln x}{x}$$

1 .a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de f(1) et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\frac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$

c. En déduire les réels a et b.

2 .a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle]0;+∞[, $f'(x)$ a le même signe que – lnx.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en +∞. on pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x)=\frac{2}{x}+2\frac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3 .a. Démontrer que l'équation f(x) = 1 admet une unique solution α sur l'intervalle]0;1[.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il un unique réel β de l'intervalle]1;+∞[tel que f(β) = 1.
Déterminer l'entier n tel que n < β < n+1.

4 . **Variables :** a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation : Affecter à a la valeur 0.
Affecter à b la valeur 1
Traitement : Tant que b-a > 0,1
Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$
Si f(m) < 1 alors Affecter à a la valeur m
Sinon Affecter à b la valeur m

Fin de Si
Fin de Tant que

Sortie : Afficher a
Afficher b

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape1	*étape2*	*étape3*	*étape4*	*étape5*
a	**0**				
b	**1**				
b-a					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}

5 . Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. En remarquant que l'expression de f(x) peut s'écrire $\frac{2}{x}+2\times\frac{1}{x}\times\ln x$,

terminer la démonstration.

CORRECTION

x∈]0;+∞[$\quad f(x)=\dfrac{a+b\ln x}{x}$

1 .a. La courbe représentative de f passe par $B(1;2)$ donc f(1) = 2.
$B(1:2)$ et $C(0;2)$ donc la droite (BC) est la droite d'équation : y = 2.
(BC) est la tangente au point B à la courbe $\mathscr{C}$ donc le coefficient directeur de la droite (BC) est $f'(1)$ donc $f'(1)=0$.

b. f est dérivable sur]0;+∞[

$f=\dfrac{u}{v} \qquad u(x)=a+b\ln x \qquad u'(x)=\dfrac{b}{x}$

v(x)= x $\qquad$ v'(x) = 1

$$f'(x)=\frac{x\left(\dfrac{b}{x}\right)-1\times(a+b\ln x)}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$$

c. f(1) = 2

$f(1)=\dfrac{a+b\ln 1}{1}=a=2$

a = 2

$f'(x)=\dfrac{(b-2)+2\ln x}{x^2}$ et $f'(1)=0$

$f'(1)=\dfrac{b-2+2\ln 1}{1}=b-2=0$

b = 2

$f(x)=\dfrac{2+2\ln x}{x}$

2 .a. $f'(x)=\dfrac{2-2-2\ln x}{x^2}=\dfrac{-\ln x}{x^2}$

Le signe de $f'(x)$ sur]0;+∞[est le signe de -lnx.
$-\ln x\leqslant 0 \Leftrightarrow \ln x\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant 1$
$-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<0\Leftrightarrow 0<x<1$

b. . $f(x)=\dfrac{2+2\ln x}{x}=\dfrac{1}{x}\times(2+2\ln x)$

x > 0 $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(2+2\ln x)=-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to o} f(x)=-\infty$

. $f(x)=\dfrac{2}{x}+2\dfrac{\ln x}{x}$

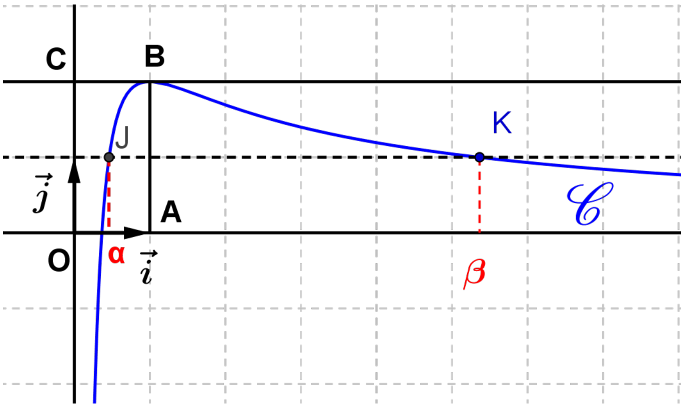
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

c. Tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
Signe de f ' (x)		$-$	0	$+$	
Variations de f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

<u>Remarques</u>
La droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$ et la droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3 .



Dans le repère précédent on trace la droite d'équation y = 1.
Les solutions de l'équation f(x) = 1 sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation y = 1.
Sur le graphique on note J et K les deux points d'intersection.

a. f est continue et strictement croissante sur]0;1], $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et f(1) = 2,

le théorème des valeurs intermédiaires, nous permet d'affirmer que $1 \in]-\infty;2]$ admet un unique antécédent α par f appartenant à]0;1], c'est à dire que l'équation f(x) = 1 admet une solution et une seule α appartenant à]0;1].

b . f est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, f(1) = 2 et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$,

le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer $1 \in]0;2]$ admet un unique antécédent β par f appartenant à $[1;+\infty[$, c'est à dire que l'équation f(x) = 1 admet une solution et une seule β appartenant à $[1;+\infty[$.
En utilisant la calculatrice, par balayage (on peut aussi utiliser la figure précédente) on obtient f(5) $\simeq 1{,}04 > 1$ et f(6) $\simeq 0{,}93 < 1$.

$f(\beta) = 1$ et $\beta \in [1;+\infty[$ $\qquad f(6) < f(\beta) < f(5)$
f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$
donc $\quad 5 < \beta < 6$.

4 .a.

	étape1	*étape2*	*étape3*	*étape4*	*étape5*
a	0	0	0.25	0.375	0.4375
b	1	0.5	0.5	0.5	0.5
b-a	1	0.5	0.25	0.125	0.0625
m	0.5	0.25	0.375	0.4375	0.46875

<u>justifications :</u>

. **Etape 1 :** a = 0 et b = 1 donc b – a = 1 - 0 = 1

et $m = \dfrac{0+1}{2} = 0{,}5$

on calcule $f(0{,}5) \simeq 1{,}023 > 1$

donc a = 0 et b = 0,5

. **Etape 2 :** a = 0 et b = 0,5 et b – a = 0,5

m = 0,25

on calcule $f(0{,}25) \simeq -3{,}09 < 1$

donc a = 0,25 et b = 0,5

. **Etape 3 :** a = 0,25 et b = 0,5 et b – a = 0,25

m = 0,375

on calcule $f(0{,}375) \simeq 0{,}10 < 1$

donc a = 0,375 et b 0,5

. **Etape 4 :** a = 0,375 et b = 0,5 et b – a = 0,125

m = 0,4375

on calcule $f(0{,}4375) \simeq 0{,}79 < 1$

donc a = 04375 et b = 0,5

. **Etape 5 :** a = 0,4375 et b = 0,5 et b – a = 0,0625

m = 0,46875

on calcule $f(0{,}46875) \simeq 1{,}03 > 1$

donc a = 0,4375 et b = 0,46875

b. on obtient les encadrements successifs de α :

. a = 0 et b = 1	$0 < \alpha < 1$	amplitude : b-a = 1 = 2^0
. a = 0 et b = 0,5	$0 < \alpha < 0{,}5$	amplitude : b-a = 0,5 = 2^{-1}
. a = 0,25 et b = 0,5	$0{,}25 < \alpha < 0{,}5$	amplitude : b-a = 0,25 = 2^{-2}
. a = 0,375 et b = 0,5	$0{,}375 < \alpha < 0{,}5$	amplitude : b-a = 0,125 = 2^{-3}
. a = 0,4375 et b = 0,5	$0{,}4375 < \alpha < 0{,}5$	amplitude : b-a = 0,0625 = 2^{-4}
. a = 0,4375 et b = 0,46875	$0{,}4375 < \alpha < 0{,}46875$	amplitude : b-a = 0,03125 = 2^{-5}

c. Attention f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ et $\beta \in]5;6[$.

Variables : a,b,m sont des nombres réels.

Initialisation : Affecter à a la valeur **5**

Affecter à b la valeur **6**

Traitement : Tant que b – a > 0,1

Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$

Si f(m) > 1 Affecter à **a** la valeur m
Sinon Affecter à **b** la valeur m
Fin Si
Fin Tant que
Sortie : Afficher a
Afficher b

5 .a. f(x) = 0 ⇔ 2 + 2lnx = 0 ⇔ lnx = -1 ⇔ $x=\frac{1}{e}$

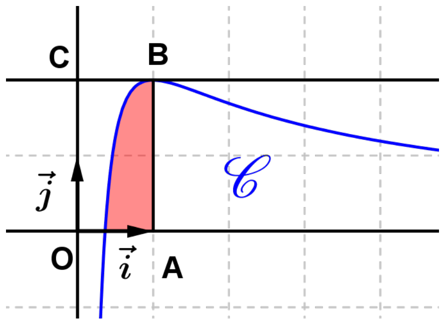
f est strictement croissante sur]0;1] donc :

$\frac{1}{e} \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow f(\frac{1}{e}) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 2$

<u>conséquence :</u>
f est positive sur [$\frac{1}{e}$;1]

f est continue et positive sur [$\frac{1}{e}$;1] donc l'aire de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = $\frac{1}{e}$ et x = 1 est :

$$\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ en U.A.}$$



L'aire du rectangle : OABC est $1\times2=2$ U.A. donc la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaine de même aire si et seulement si : $\mathscr{A}$ = 1 U.A.

soit $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. $f(x)=\frac{2}{x}+2\times\frac{1}{x}\times\ln x$

$f_1(x)=\frac{2}{x}$ $\quad$ $\mathrm{F}_1(x)=2\ln x$

F_1 est une primitive de f_1 sur [$\frac{1}{e}$;1]

$f_2(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x$ $\quad$ or $\quad$ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ $\quad$ $\mathrm{F}_2(x)=(\ln x)^2$

F_2 est une primitive de f_2 sur [$\frac{1}{e}$;1]

$f=f_1+f_2$ $\quad$ $\mathrm{F}(x)=2\ln x+(\ln x)^2$

F est une primitive de f sur [$\frac{1}{e}$;1]

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(\tfrac{1}{e}) = 2\ln 1+(\ln 1)^2-2\ln\left(\frac{1}{e}\right)-\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\times 0+0-2\times(-1)-(-1)^2=2-1=1$$