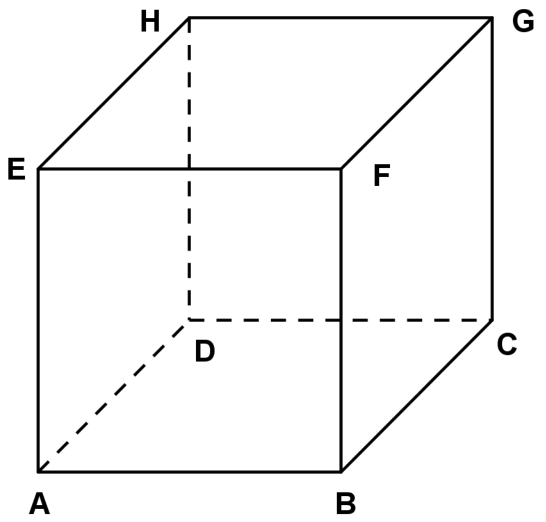
Exercice 3 4 points

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1 . Proposition 1 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - i| = |z + i|$ est une droite.

2 . Proposition 2 : Le nombre complexe $(1+i\sqrt{3})^4$ est un nombre réel.

3 . Soit ABCDEFGH un cube



Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.

4 . L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+y+3z+4=0$. On note S le point de coordonnées $(1;-2;-2)$.
Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 1+3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

CORRECTION

1 . Proposition 1 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

Première méthode : (méthode géométrique)

Dans le plan complexe, on considère les points M(z), A(i),B(-1).

$\overrightarrow{AM}$ (z-i) et $\overrightarrow{BM}$ (z+1)

AM = | z – i | et BM = | z + 1 |

L'ensemble des points M(z) tels que | z – i | = | z + 1 | est l'ensemble des points M tels que : AM = BM c'est à dire la médiatrice de [AB].

Deuxième méthode : (méthode analytique)

$z = x + iy \quad x\in\mathbb{R} \quad y\in\mathbb{R}$

$z-i=x+i(y-1) \qquad |z-i|^2=x^2+(y-1)^2$

$z+1=x+1+iy \qquad |z+1|^2=(x+1)^2+y^2$

$|z-i|=|z+1| \iff |z-i|^2=|z+1|^2 \iff x^2+(y+1)^2=(x+1)^2+y^2$

$\iff x^2+y^2-2y+1=x^2+2x+1+y^2 \iff y=-x$

L'ensemble des points M(z) tels que $|z-i|=|z+1|$ est la droite d'équation $y=-x$.

2 . Proposition 2 : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Première méthode :

Il n'est pas nécessaire d'utiliser la formule du binôme

$(1+i\sqrt{3})^2=1+2i\sqrt{3}-3=-2+2i\sqrt{3}$

$(1+i\sqrt{3})^4=(-2+2i\sqrt{3})^2=4-8i\sqrt{3}-12=-8-8i\sqrt{3}$

La partie imaginaire est non nulle

Remarque

$(1+i\sqrt{3})^3=(1+i\sqrt{3})^2(1+i\sqrt{3})=(-2+2i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})=-2+2i\sqrt{3}-2i\sqrt{3}-6=-8$

(nombre réel) et $(1+i\sqrt{3})^4=-8(1+i\sqrt{3})$

Deuxième méthode :

On écrit le nombre complexe : $z=1+i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle

$|z|^2=|1+i\sqrt{3}|^2=4$

$z=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\arg(z)=\frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

$\arg(z^2)=\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$

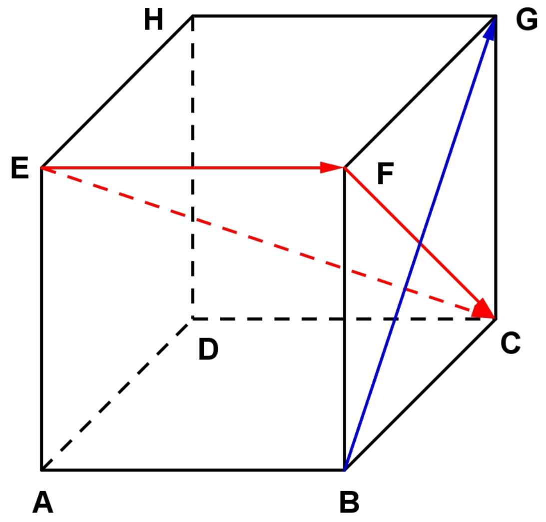
$\arg(z^3)=\pi \quad (2\pi)$

$\arg(z^4)=\frac{4\pi}{3} \quad (2\pi)$

donc z^4 n'est pas un nombre réel.

3 . Proposition 3 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

Première méthode :



$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}$

$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BG}$

(EF) est orthogonale au plan (BCG) donc les droites (EF) et (BG) sont orthogonales

et $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$

BCGF est un carré, les droites (FC) et(BG) sont orthogonales (diagonales du carré)

donc $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$

conclusion :

$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$ et les droites (EC) et (BG) sont orthogonales

<u>Deuxième méthode :</u> (analytique)

$(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormal de l'espace.

$E(0;0;1) ; C(1;1;0) ; B(1;0;0) ; G(1;1;1)$

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = 1\times 0+1\times 1+1\times(-1)=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont orthogonaux donc les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.

4 . Proposition 4 : $\boxed{\textbf{VRAIE}}$

$\mathscr{P} : x+y+3z+4=0$ $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

Représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ $\begin{cases} x = 2+t \\ y=-1+t \\ z=1+3t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$, $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, $\vec{V} = \vec{N}$ donc $\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$.

$S(1;-2;-2)$

$\begin{cases} 1 = 2+t \\ -2=-1+t \\ -2=\mp 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=t \\ -1=t \\ -1=t \end{cases} \Leftrightarrow \{t=-1$ donc S appartient à $\mathscr{D}$

<u>Conclusion :</u>

$\mathscr{D}$ est la perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par S.