Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1 .a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 .On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2 .a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n+3$

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$.

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3 . On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-n$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4 . Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+\ldots+u_n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n=\frac{\mathrm{S}_n}{n^2}$$

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Déterminer la suite de la suite (T_n).

CORRECTION

$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$.

1 .a. $u_1=\frac{2}{3}u_0+\frac{1}{3}\times 0+1=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$ $u_1=\frac{7}{3}$ $\simeq 2{,}33$

$u_2=\frac{2}{3}\times\frac{7}{3}+\frac{1}{3}\times 1+1=\frac{14}{9}+\frac{3}{9}+\frac{9}{9}=\frac{26}{9}$ $u_2=\frac{26}{9}$ $\simeq 2{,}89$

$u_3=\frac{2}{3}\times\frac{26}{9}+\frac{1}{3}\times 2+1=\frac{52}{27}+\frac{18}{27}+\frac{27}{27}=\frac{97}{27}$ $u_3=\frac{97}{27}$ $\simeq 3{,}59$

$u_4=\frac{2}{3}\times\frac{97}{27}+\frac{1}{3}\times 3+1=\frac{194}{81}+\frac{81}{81}+\frac{81}{81}=\frac{356}{81}$ $u_4=\frac{356}{81}$ $\simeq 4{,}40$

b. Conjecture : **« la suite (u_n) est croissante »**

2 .a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n\leqslant n+3$.

. Initialisation :

$u_0 = 2$ et $0+3 = 3$ donc $u_0\leqslant 0+3$

La propriété est vérifiée pour n = 0

. Hérédité :

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $u_n\leqslant n+3$ et on doit démontrer que : $u_{n+1}\leqslant(n+1)+3=n+4$ (c'est à dire $n+4-u_{n+1}\geqslant 0$ sachant que $n+3-u_n\geqslant 0$).

$n+4-u_{n+1}=n+4-\frac{2}{3}u_n-\frac{1}{3}n-1=\frac{2}{3}n+3-\frac{2}{3}u_n=\frac{2}{3}(n+3-u_n)+1$

or $n+3-u_n\geqslant 0$ donc $n+4-u_{n+1}\geqslant 0$

. Conclusion :

Le principe de récurrence permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\leqslant n+3$.

b. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n=\frac{1}{3}n+1-\frac{1}{3}u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

c. $n+3-u_n\geqslant 0$ donc pour tout entier naturel n : $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$

La suite (u_n) est donc croissante.

3 . Pour tout entier naturel n, on a : $v_n=u_n-n$

a. $v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}(u_n-n)=\frac{2}{3}v_n$

$v_0=u_0-0=u_0=2$

(v_n **)** est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $\frac{2}{3}$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n=v_0\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_n=v_n+n$

donc $u_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$

c. $0<\frac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

4 .a. Pour tout entier naturel non nul n

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+\ldots+u_n=v_0+0+v_1+1+\ldots+v_n+n=v_0+v_i+\ldots+v_n+0+1+\ldots+n$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n} k$$

$$\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{v_{n+1}-v_0}{\frac{2}{3}-1}$$

$$v_{n+1}-v_0=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-2 \qquad \frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = -3\left(2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-2\right)=6-6\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n = 6-6\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\frac{n(n+1)}{2}$$

b. $T_n=\frac{S_n}{n^2}= \frac{6}{n^2}-\frac{6}{n^2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n^2}=0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n^2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n=\frac{1}{2}.$$