Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250000 habitants dont 70 % résident à la campagne et 30 % en ville.
L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant
- chaque année, 5 % de ceux qui résident à la ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville .

Pour un entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année (2013+n) et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1 . Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n .

2 . Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}0{,}95 & 0{,}01\\ 0{,}05 & 0{,}99\end{pmatrix}$

On pose $X=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels fixés et Y = AX

Déterminer, en fonction de a et b les réels c et d tels que $Y=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n,

$X_{n+1} = AX_n$ où $X_n=\begin{pmatrix}v_n\\ c_n\end{pmatrix}$.

On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3 . Soient les matrices $P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$

a. Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.

b. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4 . Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que :

$$v_n=\frac{1}{6}(1+5\times 0{,}94^n)v_0+\frac{1}{6}(1-0{,}94^n)c_0$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

CORRECTION

1 . Au 1[er] janvier 2013, il y avait : $250000\times0{,}7 = 175000$ habitants à la campagne
et $250000\times0{,}3 = 75000$ habitants à la ville.
$v_0 = 75000$ et $c_0 = 175000$

Au 1[er] janvier 2013+n
v_n est le nombre d'habitants à la ville
c_n est le nombre d'habitants à la campagne

Au 1[er] janvier 2013+n+1
Il y a 5 % des habitants de la ville qui sont partis à la campagne (c'est à dire : $0{,}05\,v_n$)
et 95 % qui sont restés en ville (c'est à dire : $0{,}95\,v_n$).
Il y a 1 % des habitants de la campagne qui sont partis à la ville (c'est à dire : $0{,}01\,c_n$)
et 99 % qui sont restés à la campagne (c'est à dire : $0{,}99\,c_n$).
on obtient donc :

$$v_{n+1}=0{,}95\,v_n+0{,}01\,c_n$$
$$c_{n+1}=0{,}05\,v_n+0{,}99\,c_n$$

2 . $A=\begin{pmatrix}0{,}95 & 0{,}01\\ 0{,}05 & 0{,}99\end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ $\quad Y=AX=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0{,}95 & 0{,}01\\ 0{,}05 & 0{,}99\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0{,}95\,a+0{,}01\,b\\ d=0{,}05\,a+0{,}99\,b\end{cases}$$

n est un entier naturel

$$X_n=\begin{pmatrix}v_n\\ c_n\end{pmatrix} \qquad X_{n+1}=\begin{pmatrix}v_{n+1}\\ c_{n+1}\end{pmatrix}$$

En utilisant les résultats précédents on obtient bien : $X_{n+1}=AX_n$
On peut démontrer facilement en utilisant un raisonnement par récurrence que
pour tout entier naturel n : $X_n=A^n X_0$.

(Remarque : pour n = 0 on convient que : $A^0=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$).

3 .a. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$PQ=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$QP=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

<u>Conséquence :</u>

$$PQ=QP=6I=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

donc $P\left(\frac{1}{6}Q\right)=\left(\frac{1}{6}Q\right)P=I$

L'inverse de la matrice P est $\frac{1}{6}Q$

$$P^{-1}=\frac{1}{6}Q$$

b. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$QAP=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,95 & 0,01\\ 0,05 & 0,99\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -0,94\\ 5 & 0,94\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 5,64\end{pmatrix}$$

$$D=\frac{1}{6}QAP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0,94\end{pmatrix}$$

c. $D=P^{-1}AP$

donc $PD=(PP^{-1})AP=IAP=AP$ et $PDP^{-1}=A(PP^{-1})=AI=A$

conclusion :

$$A=PDP^{-1}$$

4 . On vérifie très facilement que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$D^n=\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & 0,94^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0,94^n\end{pmatrix}$$

donc $A^n=PD^nP^{-1}=\frac{1}{6}(PD^nQ)$

$$A^n=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0,94^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5\times 0,94^n & 0,94^n\end{pmatrix}$$

$$A^n=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1+5\times 0,94^n & 1-0,94^n\\ 5-5\times 0,94^n & 5+0,94^n\end{pmatrix}$$

$$X_n=A^nX_0 \qquad \begin{pmatrix}v_n\\ c_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}v_0\\ c_0\end{pmatrix}$$

On obtient :

$$v_n=\frac{1}{6}[(1+5\times 0,94^n)v_0+(1-0,94)c_0]$$

$$0<0,94<1 \qquad \lim_{n\to+\infty}0,94^n=0$$

$$\text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{6}(v_0+c_0)=\frac{250000}{6}\simeq 41667$$

A long terme, il y aura environ 41667 habitants en ville.