Exercice 1 — 6 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^{-x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Etude de la fonction f

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.

b. Etudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.

c. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.
On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation x = 0 et x = 1. On approche l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

a. Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0;1]$ en quatre intervalles de même longueur :

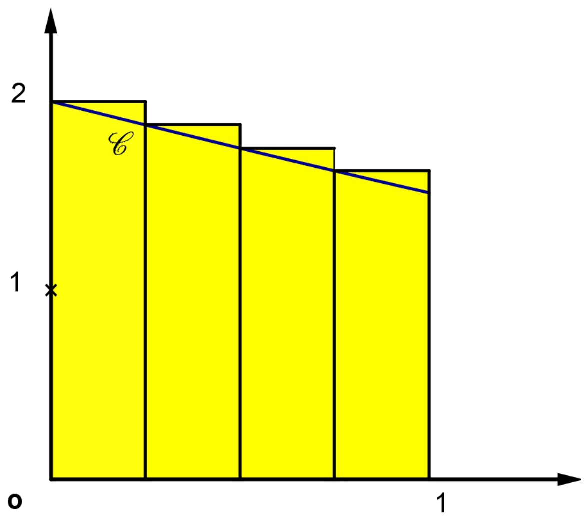
. Sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$.

. Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$

. Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left[\frac{1}{2}\right)$

. Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4};1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous



L'algorithme ci-après permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $S+\frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

b. Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1 On découpe l'intervalle $[0;1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question **2.a.** Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(-x-3)\mathrm{e}^{-x}$.
On admet que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant $\mathscr{A}$ par une valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question **2.a.** c'est à dire l'écart entre ces deux valeurs.

CORRECTION

Pour tout nombre réel x : $f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-x}$

1. a. $f(0)=2$

Le couple de coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des ordonnées est : $(0;2)$.

$(x+2)\mathrm{e}^{-x}=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

car pour tout nombre réel x : $\mathrm{e}^{-x}\neq 0$.

Le couple de coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses est : $(-2;0)$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$

d'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty$ conclusion $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(ce résultat permet d'affirmer qu'il n'existe pas d'asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$ mais ne permet pas d'affirmer qu'il n'existe pas d'asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$).

$f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-x}=x\,\mathrm{e}^{-x}+2\,\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}=0$

conclusion $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

La droite d'équation : y=0 est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

On a : $(\mathrm{e}^{-x})'=-\mathrm{e}^{-x}$

et $f'(x)=1\times\mathrm{e}^{-x}-(x+2)\mathrm{e}^{-x}=(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$

Pour tout nombre réel x : $\mathrm{e}^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de : $-x-1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e	↘	0

$f(-1)=(-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)}=1\times\mathrm{e}^{1}=\mathrm{e}$

2. Remarque

Le repère donné est un repère orthogonal qui n'est pas orthonormé.

L'unité d'aire est l'aire du rectangle coloré eu rouge sur la figure suivante.

a. On obtient : $\boxed{S = 1{,}642}$

b. Algorithme (N est un entier naturel strictement supérieur à 1 donné)

Variables : k est un entier naturel
S est un nombre réel

Initialisation : Affecter à S la valeur 0

Traitement : Pour k variant de 0 à N-1
Affecter à S la valeur $S+\frac{1}{N}f\left(\frac{k}{N}\right)$
Fin Pour

Sortie : Afficher S

3. $g(x)=(-x-3)e^{-x}$
on peut vérifier que : $g'(x)=f(x)$
$g'(x)=-1\times e^{-x}+(x+3)e^{-x}=(x+2)e^{-x}=f(x)$

a. f est continue et positive sur $[0;1]$, donc l'aire de $\mathscr{D}$ en unités d'aire est :

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = g(1)-g(0)=-4\times e^{-1}+3=3-\frac{4}{e} \text{ U.A.}$$

$$\mathscr{A} = 3-\frac{4}{e} \text{ U.A.}$$

b. $\mathscr{A} \simeq 1{,}528$
1,642 – 1,528 = **0,114**