Exercice 2

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\frac{z_1}{z_2}$ est :

- (a) $\sqrt{3}e^{i\frac{19\pi}{12}}$ (b) $\sqrt{12}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ (c) $\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ (d) $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue z , admet :

- a. une solution
- b. deux solutions
- c. une infinité de solutions dont les points image dans le plan complexe sont situés sur une droite.
- d. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 5; 4)$ et $C(-1; 0; 4)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

- (a) $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t \\ z = t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ (b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
- (c) $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ (d) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point

$D(-1; 2; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la droite Δ de représentation

paramétrique $\begin{cases} x = t - 7 \\ y = t + 3 \\ z = 2t + 5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

- a. La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
- b. La droite Δ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathcal{P}$.
- c. La droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.
- d. La droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

CORRECTION

1. **Réponse : (d)**

Justification (non demandée)

$$\left| \frac{i z_1}{z_2} \right| = \frac{|i| |z_1|}{|z_2|} \quad |i| = 1 \quad |z_1| = \sqrt{6} \quad \text{et} \quad |z_2| = \sqrt{2}$$

$$\left| \frac{i z_1}{z_2} \right| = \frac{1 \times \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$\arg \left(i \frac{z_1}{z_2} \right) = \arg(i) + \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad (2\pi)$$

Or $\arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$; $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$ et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

$$\arg \left(i \frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

$$\arg \left(i \frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{6+3+4}{12} \pi \quad (2\pi)$$

$$\arg \left(i \frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{13\pi}{12} \quad (2\pi)$$

Conclusion :

$$i \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{3} e^{i \frac{13\pi}{12}}$$

2. **Réponse : (c)**

Justification (non demandée)

z est un nombre complexe $z = x + iy$ x et y sont des nombres réels.

$$\bar{z} = x - iy$$

$$-z = \bar{z} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow x + iy + x - iy = 0 \Leftrightarrow 2x + 0y = 0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ et } y \in \mathbb{R}).$$

L'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est nulle est l'axe des ordonnées.

3. **Réponse : (a)**

Justification (non demandée)

Un vecteur directeur de la parallèle à (AB) passant par C est un vecteur non nul colinéaire

au vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

. Pour (a) , on a la représentation paramétrique de la droite de vecteur directeur $\vec{u}_a \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

passant par $C(-1; 0; 4)$.

On peut donc conclure car dans l'énoncé on affirme qu'il n'y a qu'une bonne réponse.

Remarques :

. Pour (b) , $\vec{u}_b \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_b$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, mais la droite (AB) passe par C.

. Pour (c) , $\vec{u}_c \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_c = \overrightarrow{AB}$

$$\begin{cases} -1 = -1 - 2t \\ 0 = 5 + 3t \\ 4 = 4 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{5}{3} \\ t = 0 \end{cases} \text{ donc la droite de représentation paramétrique (c)}$$

est parallèle à (AB) mais ne passe pas par C.

• Pour (d), $\vec{u}_d = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_d = -\overline{AB}$

$$\begin{cases} -1 = 2t \\ 0 = -3t \\ 4 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = 0 \\ t = -4 \end{cases} \text{ donc la droite de représentation paramétrique (d) est}$$

parallèle à (AB) mais ne passe pas par C.

4. Réponse : (b)

Justification (non demandée)

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur de } \Delta \text{ et } \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal } \mathcal{P}.$$

$\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires donc Δ n'est pas perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 3 + 1 \times (-5) + 2 \times 1 = 0$$

donc Δ est parallèle à $\mathcal{P}$.

A(-7; 3; 5) appartient à Δ et D(-1; 2; 3) appartient à $\mathcal{P}$.

Δ est incluse dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = 0$

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = 6 \times 3 - 1 \times (-5) - 2 \times 1 = 18 + 5 - 2 = 21 \neq 0$$

Donc Δ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.