Exercice 3 5 points

Les trois parties peuvent être traitée de manière indépendante.

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.
L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :
30 % de musique classique, 45% de variété, le reste étant du jazz.
Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait :

- Les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- Les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considère les événements suivants :
C : « Le morceau écouté est un morceau de musique classique »
V : « Le morceau écouté est un morceau de variété »
J : « Le morceau écouté est un morceau de jazz »
H : « le morceau écouté est encodé en haute qualité »
S : « Le morceau écouté est encodé en qualité standard »

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire »
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?

2. On sait que $P(H)=\frac{13}{20}$

a. Les événements C et H sont-ils indépendants ?

b. Calculer $P(J\cap H)$ et $P_J(H)$

Partie 2

Pendant un long trajet en train. Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son MP3, 60 morceaux de musique.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60.

2. Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage . Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

Partie 3
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque chanson stockée sur le lecteur MP3 associe sa durée exprimée en secondes et on établit que X suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart type 20.

On pourra utiliser le tableau fourni en annexe dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

On écoute un morceau musical au hasard.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(180 \leqslant X \leqslant 220)$.

2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité que le morceau écouté dure plus de 4 minutes.

ANNEXE

X est une variable aléatoire de loi normale d'espérance 200 et d'écart type 20

b	$P(X \leq b)$
140	0.001
150	0.006
160	0.023
170	0.067
180	0.159
190	0.309
200	0.500
210	0.691
220	0.841
230	0.933
240	0.977
250	0.994
260	0.999

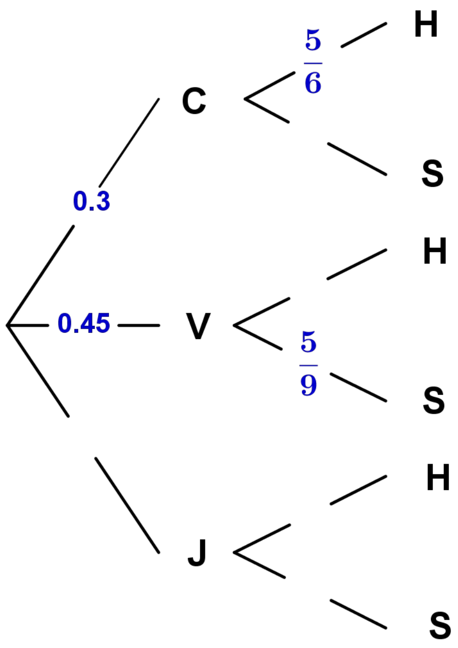
CORRECTION

Partie 1

L'énoncé nous donne les résultats suivants :

$P(C)=0{,}3$; $P(V)=0{,}45$; $P_C(H)=\frac{5}{6}$; $P_V(S)=\frac{5}{9}$ et aussi $S=\bar{H}$

On construit l'arbre pondéré :



1. On demande de calculer $P(C\cap H)$

$P(C\cap H)=P(C)\times P_C(H)$

$P(C\cap H)=0{,}3\times\frac{5}{6}=\frac{1{,}5}{6}=\frac{1}{4}=0{,}25$

2. a. $P(H)=\frac{13}{20}$ et $P(C)=0{,}3$

$P(H)\times P(C)=\frac{13}{20}\times 0{,}3=\frac{39}{200}=0{,}195$ et $P(C\cap H)=0{,}25$

donc $P(H)\times P(C)\neq P(H\cap C)$

Les événements C et H ne sont pas indépendants

b. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales on obtient :

$P(H)=P(C\cap H)+P(V\cap H)+P(J\cap H)$

$P(J\cap H)=P(H)-P(C\cap H)-P(J\cap H)$

$P(H)=\frac{13}{20}$ et $P(C\cap H)=0{,}25$

$P(V\cap H)=(V)\times P_V(H)$

Or $P_V(H)+P_V(S)=1$ et $P_V(H)=1-P_V(S)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

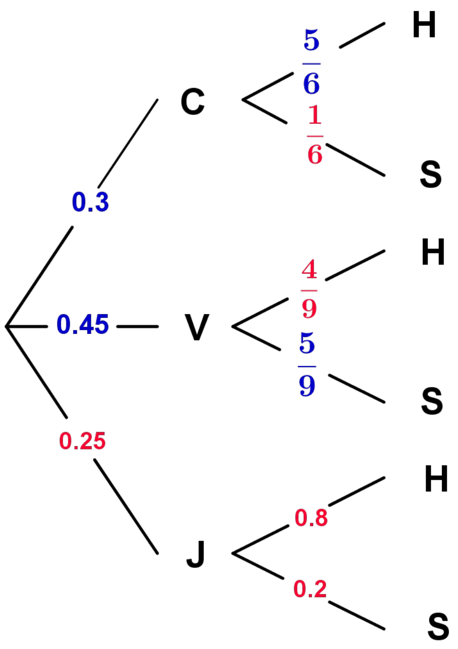
$P(V\cap H)=0{,}45\times\frac{4}{9}=\frac{1{,}8}{9}=0{,}2$

$P(J\cap H)=\frac{13}{20}-0{,}25-0{,}2=0{,}65-0{,}45=0{,}2$

D'autre part : $P(C)+P(V)+P(J)=1$
donc $P(J)=1-P(C)-P(V)=1-0{,}3-0{,}45=0{,}25$
et $P(J\cap H)=P(J)\times P_J(H)$ soit $0{,}2=0{,}25\times P_J(H)$
<u>Conclusion</u>

$$P_J(H)=\frac{0{,}2}{0{,}25}=0{,}8$$

On donne l'arbre pondéré complété



Partie 2

1. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
Succès C : le morceau de musique obtenu est un morceau de musique classique
$P(C)=0{,}3$
Echec $\bar{C}=V\cup J$ $P(\bar{C})=0{,}7$
On effectue 60 épreuves indépendantes, on obtient un schéma de Bernoulli et la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 60 épreuves est la loi binomiale de paramètres n = 60 et p = 0,3.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille n = 60 est :

$$\left[p-1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

n = 60 $\geqslant$ 30 np = $60\times0{,}3=18\geqslant5$ n(1-p) = $60\times0{,}7=42\geqslant5$

$$I=\left[0{,}3-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}21}{60}};0{,}3+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}21}{60}}\right]$$

$$1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}21}{60}}\simeq 0{,}116$$

On obtient
$I=[0{,}184;0{,}416]$

2. La proportion de morceaux de musique classique obtenus dans l'échantillon de taille 60 est :

$f = \dfrac{12}{60} = 0,2$

Or 0,2 appartient à l'intervalle I donc il ne faut pas penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 est défectueuse.

Partie 3

1. En utilisant le tableau on obtient :

$P(180 \leqslant X \leqslant 240) = P(X \leqslant 220) - P(X \leqslant 180) = 0,841 - 0,159 = \mathbf{0,682.}$

2. 4 minutes = 240 secondes

$P(240 \leqslant X) = 1 - P(X \leqslant 240) = 1 - 0,977 = \mathbf{0,023.}$