Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. a. Calculer u_1 et u_2 .

b. Démontrer , par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n, par $v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{3^n}{3^n+1}$

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

$u_0=\frac{1}{2}=0{,}5$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$

1. a. $u_1=\frac{3\times 0{,}5}{1+2\times 0{,}5}=\frac{1{,}5}{2}=\frac{3}{4}=0{,}75$

$u_2=\frac{3\times 0{,}75}{1+2\times 0{,}75}=\frac{2{,}25}{2{,}5}=\frac{225}{250}=\frac{9}{10}=0{,}9$

b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n on a $0<u_n$.

Initialisation

$u_0=\frac{1}{2}>0$ La propriété est vérifiée pour n = 0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété es héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $0<u_n$ et on doit démontrer que $0<u_{n+1}$

Or $u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$ on a : $3u_n>0$ et $1+2u_n>0$ donc $u_{n+1}>0$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $0<u_n$.

2. a. Pour tout entier naturel n

$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n}{1+2u_n}-\frac{u_n(1+2u_n)}{1+2u_n}=\frac{u_n(3-1+2u_n)}{1+2u_n}=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$

or $u_n>0$ et $1-u_n>0$ (car $u_n<1$) donc $u_{n+1}-u_n>0$

et la suite (u_n) est croissante.

b. La suite (u_n) est majorée (par 1) et croissante donc convergente.

3. a. Pour tout entier naturel n

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}=\frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}}=\frac{3u_n}{1+2u_n}\times\frac{1+2u_n}{1+2u_n-3u_n}=\frac{3u_n}{1-u_n}=3v_n$$

donc la suite (v_n) est la suite géométrique de raison 3 et de premier terme

$v_0=\frac{u_o}{1-u_0}=\frac{0{,}5}{1-0{,}5}=\frac{0{,}5}{0{,}5}=1$

b. Pour tout entier naturel n

$v_n=v_0\times 3^n=3^n$

c. Pour tout entier naturel

$v_n=\frac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow (1-u_n)v_n=u_n \Leftrightarrow v_n=u_n(v_n+1) \Leftrightarrow u_n=\frac{v_n}{v_n+1}$

donc $v_n=\frac{3^n}{3^n+1}$

d. $u_n = \dfrac{3^n}{3^n} \times \dfrac{1}{\dfrac{1}{3^n}+1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3^n}+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$