Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution du nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.
En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la $n^{\text{ième}}$ année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la $n^{\text{ième}}$ année après 2013.
Ainsi $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante : pour tout entier naturel n $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7\,a_n + 0{,}2\,b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0{,}1\,a_n + 0{,}6\,b_n + 70 \end{cases}$

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

1. a. Déterminer U_1

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b. En déduire que la matrice I – M est inversible et préciser son inverse.

c. Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$

3. pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - U$

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M \times V_n$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = M^n \times V_0$

4. On admet que, pour tout entier naturel n, $V_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{3} \times 0{,}8^n - \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ -\dfrac{50}{3} \times 0{,}8^n + \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$

a. Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).

b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

CORRECTION

1. a. $U_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a_1 = 0{,}7\,a_0 + 0{,}2\,b_0 + 60 = 0{,}7\times 300 + 0{,}2\times 300 + 60 = 210 + 60 + 60 = 330 \\ b_1 = 0{,}1\,a_0 + 0{,}6\,b_0 + 70 = 0{,}1\times 300 + 0{,}6\times 300 + 70 = 30 + 180 + 70 = 280 \end{cases}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}$$

b. $$M\times U_n + P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7\,a_n + 0{,}2\,b_n \\ 0{,}1\,a_n + 0{,}6\,b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}7\,a_n + 0{,}2\,b_n + 60 \\ 0{,}1\,a_n + 0{,}6\,b_n + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

donc $U_{n+1} = M\times U_n + P$

2. a. $$I - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$(I - M)\text{x}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}3\times 4 - 0{,}2\times 1 & 0{,}3\times 2 - 0{,}2\times 3 \\ -0{,}1\times 4 + 0{,}4\times 1 & -0{,}1\times 2 + 0{,}4\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(on peut utiliser la calculatrice)

b. $$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\text{ x }(I - M) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4\times 0{,}3 + 2\times(-0{,}1) & 4\times(-0{,}2) + 2\times 0{,}4 \\ 1\times 0{,}3 + 3\times(-0{,}1) & 1\times(-0{,}2) + 3\times 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $I - M$ est une matrice inversible et son inverse est la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

c. $U = M\times U + P \iff U - M\times U = P \iff I\times M - M\times U = P \iff (I - M)\times U = P$

$\iff \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\text{ x }(I - M)\text{ x }U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\text{ x }P \iff U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\text{ x }P$

$\iff U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 60 + 2\times 70 \\ 1\times 60 + 3\times 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

$$U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$$

3. Pour tout entier naturel n : $V_n = U_n - U$

$V_{n+1} = U_{n+1} - U = M\times U_n + P - U$

Or $U = M\times U + P$

$V_{n+1} = M\times U_n + P - (M\times U + P) = M\times(U_n - U) = M\times V_n$

$V_{n+1} = M\times V_n$

b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n on a $V_n = M^n\times V_0$

Initialisation

Pour n = 0 il faut alors supposer que $M^0 = I$ et on obtient $M^0 \times V_0 = I \times V_0 = V_0$

(on peut alors affirmer que la propriété est vérifiée pour n = 0)

Pour n = 1 $M^1 \times V_0 = M \times V_0 = V_1$

La propriété est vérifiée pour n = 1

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que $V_n = M^n \times V_0$ et on doit démontrer que $V_{n+1} = M^{n+1} \times V_0$

On a $V_{n+1} = M \times V_n = M \times (M^n \times V_0) = (M \times M^n) \times V_0 = M^{n+1} V_0$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a $V_n = M^n \times V_0$

3. On admet que, pour tout entier naturel n : $V_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ \frac{-50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$

a. $V_n = U_n - U \iff U_n = V_n + U \iff U_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 380 \\ \frac{-50}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 270 \end{pmatrix}$

on a $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc $a_n = -\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 380$

-1 < 0,8 < 1 donc $\lim_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$

-1 < 0,5 < 1 donc $\lim_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$

Conséquence

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 380$$

b. Le nombre d'abonnés de l'opération A à long terme peut être estimé à : **380000.**