Exercice 1 5 points

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points $A(0;4;1)$, $B(1;3;0)$, $C(2;-1;-2)$ et $D(7;-1;4)$

1. Démontrer que les points A, B et C, ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par D et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

a. Démontrer que Δ est orthogonale au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b. Vérifier que la droite d, d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=-4t-2\\ y=t\\ z=3t+2\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

CORRECTION

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$

Il n'existe pas de réel a tel que : $\overrightarrow{AC} = a\ \overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\ .\ \vec{u} = 1\times2+(-1)\times(-1)+(-1)\times3=2+1-3=0$

$\overrightarrow{AC}\ .\ \vec{u} = 2\times2+(-5)\times(-1)+(-3)\times3=4+5-9=0$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Conséquence :

Δ est orthogonale au plan (ABC).

b. $M(x;y;z)\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\ .\ \vec{u}=0 \Leftrightarrow (x-0)\times2+(y-4)\times(-1)+(z-1)\times3=0$

$\Leftrightarrow 2x-y+3z+1=0$

(ABC) : $2x-y+3z+1=0$

c. Δ est la droite passant par : $D(7;-1;4)$ et de vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

Δ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=2\lambda+7\\y=-\lambda-1\\z=3\lambda+4\end{cases}\quad \lambda\in\mathbb{R}$

d. $\begin{cases}2x-y+3z=0\\x=2\lambda+7\\y=-\lambda-1\\z=3\lambda+4\end{cases}$ donc $2(2\lambda+7)-(-\lambda-1)+3(3\lambda+4)+1=0$

soit $4\lambda+14+\lambda+1+9\lambda+12+1=0$

$14\lambda+28=0$

$\lambda=-2$

$\begin{cases}x=2\times(-2)+7=3\\y=-(-2)-1=1\\z=3\times(-2)+4=-2\end{cases}\qquad H(3;1;-2)$

3. a. $\mathscr{P}_1 : x+y+z=0$

$\mathscr{P}_2 : x+4y+2=0$

$\overrightarrow{N_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ et $\overrightarrow{N_2}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$

Les vecteurs $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ ne sont pas colinéaires donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b. $\begin{cases}x+y+z=0\\x+4y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+z=-y\\x=-4y-2\end{cases}$

On pose y = t $\in \mathbb{R}$ on obtient $x=-4t-2$ et $z=3t+2$ et pour représentation paramétrique de d $\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=t \\ z=3t+2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

c. $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

La droite est parallèle au plan (ABC) si et seulement si $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ (vecteur normal au plan (ABC))

$\vec{v}\ .\ \vec{u} = (-4)\times 2+1\times(-1)+3\times 3=-8-1+9=0$

<u>Conclusion</u>

d est parallèle à (ABC).