Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{2u_n}$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n ; Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin Pour
Sortie :	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit n = 3.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1.4142	1.9571	1.9986	1.9999	1.9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de la limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier n, par $v_n=\ln u_n-\ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_o=-\ln 2$.

b. Déterminer , pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite de la suite (u_n).

d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que u_n > 1,999.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

CORRECTION

1. $u_0=1$ $u_{n+1}=\sqrt{2u_n}$

a. 1ère boucle
$n=1$ on affecte à u la valeur : $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$
2^{ième} boucle
$n=2$ on affecte à u la valeur : $\sqrt{2\sqrt{2}} \simeq 1{,}6818$
3^{ième} boucle
$n=3$ on affecte à u la valeur : $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \simeq 1{,}8340$

b. Cet algorithme permet de calculer : u_n (pour la valeur de n donnée)

c. (u_n) est une suite croissante
(u_n) est une suite convergente ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$)

2. a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n \leqslant 2$
Initialisation
$u_0=1$ donc $0 < u_0 \leqslant 2$
La propriété est vérifiée pour n = 0.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $0 < u_n \leqslant 2$, et on doit démontrer que $0 < u_{n+1} \leqslant 2$.
On a : $0 < u_n \leqslant 2$ en multipliant par deux les trois membres de la double inégalité on obtient : $0 < 2u_n \leqslant 4$.
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc $\sqrt{0} < \sqrt{2u_n} \leqslant \sqrt{4}$
soit $0 < u_n \leqslant 2$.
Conclusion
Le principe de récurrence permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leqslant 2$

b. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n}-u_n=\frac{(\sqrt{2u_n}-u_n)(\sqrt{2u_n}+u_n)}{\sqrt{2u_n}+u_n}=\frac{2u_n-u_n^2}{\sqrt{2u_n}+u_n}=\frac{u_n(2-u_n)}{\sqrt{2u_n}+u_n}$$

Or $u_n > 0$ et $\sqrt{2u_n}+u_n > 0$ et $2 - u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$ soit $u_{n+1} \geqslant u_n$
Conclusion
La suite (u_n) est croissante.

c. La suite (u_n) est une suite suite croissante est majorée par 2 donc **la suite (u_n) est convergente.**

3. Pour tout entier naturel n
$v_n=\ln u_n-\ln 2$

a. $v_{n+1}=\ln(u_{n+1})-\ln 2=\ln\sqrt{2u_n}-\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2u_n-\ln 2=\frac{1}{2}(\ln 2+\ln u_n)-\ln 2$

$v_{n+1}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln u_n-\ln 2=\frac{1}{2}\ln u_n-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}(\ln u_n-\ln 2)=\frac{1}{2}v_n$

$v_0 = \ln u_0 - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

(v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = -\ln 2$ et de raison q = $\frac{1}{2}$.

b. $v_n = v_0 \times q^n$

$v_n = (-\ln 2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$v_n = \ln u_n - \ln 2 = \ln \frac{u_n}{2}$ donc $\frac{u_n}{2} = \mathrm{e}^{v_n}$ soit $\frac{u_n}{2} = \mathrm{e}^{(-\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$\frac{u_n}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ et $u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

c. $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

Conséquence

$\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{v_n} = \mathrm{e}^0 = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{2} = 1$

Conclusion

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

d.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que u ⩽ 1,9999
	Affecter à n la valeur n + 1
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n