Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :        a est un entier naturel
                   b est un entier naturel
                   c est un entier naturel
Initialisation :   Affecter à c la valeur 0
                   Demander la valeur de a
                   Demander la valeur de b
Traitement :       Tant que a ⩾ b
                       Affecter à c la valeur c+1
                       Affecter à a la valeur a-b
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher c
                   Afficher a
```

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

A chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Etape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.
Etape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de 9m+5 et on le note p.
Etape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.

2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \quad (26)$

2. Démontrer alors l'équivalence :

$$9m+5 \equiv p \quad (26) \quad \Leftrightarrow \quad m \equiv 3p-15 \quad (26)$$

3. Décoder alors la lettre B.

CORRECTION

Partie A

1. a = 13 et b = 4

$1^{ère}$ étape : $a=13-4=9$ $c=1$

$2^{ème}$ étape : $a=9-4=5$ $c=2$

$3^{ème}$ étape : $a=5-4=1$ $c=3$

$1<4$

Sortie : $a=1$ et $c=3$

2. $1^{ère}$ étape : $13=4+9$ $c=1$

$2^{ème}$ étape : $13=2\times4+5$ $c=2$

$3^{ème}$ étape $13=3\times4+1$ $c=3$

Cet algorithme permet de calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
La valeur trouvée pour a par l'algorithme est le reste de la division euclidienne de 13 par 4 et la valeur trouvée pour c est le quotient.
(Il faut imposer à b d'être un entier naturel non nul)

Partie B

1. A la lettre U est associée le nombre : 20 = m.
On calcule $9m+5=9\times20+5=185$.
p est le reste de la division euclidienne de 185 par 26.
$185=7\times26+3$ donc $p=3$.
La lettre correspondant au nombre 3 est D donc le codage de la lettre U est **D**.

2.

Variables : m est un entier naturel
p est un entier naturel
Initialisation : Demander la valeur de m
Affecter à p la valeur $9m+5$
Traitement : Tant que p $\geqslant$ 26
Affecter à p la valeur $p-26$
Fin Tant que
Sortie : Afficher p

Partie C

1. Remarque

$9\times3=27=26+1$ donc $9*3\equiv1$ (26)

et on choisit $x=3$ ²

2. $9m+5\equiv p$ (16) $\Rightarrow$ $3*9m+3*5\equiv3*p$ (26) $\Leftrightarrow$ $27m+15\equiv3p$ (26)

$\Leftrightarrow$ $m\equiv3p-15$ (26)

Réciproquement :

$m\equiv3p-15$ (26) $\Rightarrow$ $9*m\equiv9*3p-9*15$ (26) $\Leftrightarrow$ $9m\equiv27p-135$ (26)

$\Leftrightarrow$ $p\equiv9m+135$ (26) (or $135=5\times26+5$)

$\Leftrightarrow$ $p\equiv9m+5$ (26)

3. A la lettre B on associe p = 1

$m\equiv3*1-15$ (26)

$m \equiv -12 \quad (26)$
$m \equiv 26-12 \quad (26)$
$m \equiv 14 \quad (26)$
La lettre associée au nombre 14 est O.
Le décodage de B est O.