Exercice 3 5 points

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 gramme est un pain non commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart type $\sigma = 11$.
Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche.

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leq x)$	0.035	0.086	0.182	0.325	0.5	0.675	0.818	0.914	0.965

1. Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.

2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 %?
On arrondira le résultat au dixième.
On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1, on a $P(Z \leqslant -1{,}750) \simeq 0{,}040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la production de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-o décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.
Dans la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

CORRECTION

Partie A

1. P(390 $\leqslant$ X $\leqslant$ 410) = P(X $\leqslant$ 410) - P(X $\leqslant$ 390) = 0,818 – 0,182 = 0,636

P(390 $\leqslant$ X $\leqslant$ 410) = 0,636

2. Un pain choisit au hasard est commercialisable si et seulement si : X $\geqslant$ 385.

P(X $\geqslant$ 385) = 1 – P(X < 385) = 1 – 0,086 = 0,914.

P(X $\geqslant$ 385) = 0,914

3. On note Y la nouvelle variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres 400 et σ,

donc $Z=\dfrac{Y-400}{\sigma}$ suit la loi centrée et réduite.

On veut obtenir : P(Y $\geqslant$ 385) = 0,96 soit P(Y $\leqslant$ 385) = 0,04

$\dfrac{Y-400}{\sigma} \leqslant \dfrac{385-400}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leqslant -\dfrac{15}{\sigma}$

P(Z $\leqslant$ $-\dfrac{15}{\sigma}$) = 0,04

Or P(Z $\leqslant$ -1,751) = 0,04

Il suffit de choisir :

$-\dfrac{15}{\sigma}$ = -1,751 et $\sigma = \dfrac{15}{1{,}751} \simeq 8{,}6$

σ = 8,6

Partie B

1. Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %:

si n $\geqslant$ 30 et np $\geqslant$ 5 et n(1-p) $\geqslant$ 5 alors $I_n=\left[p-1{,}96\times\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+1{,}96\times\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

Ici p = 0,96 ; 1-p = 0,04 et n = 300

donc n= 300 $\geqslant$ 30 et np = 288 $\geqslant$ 5 et n(1-p) = 12 $\geqslant$ 5

et $I_{300}=\left[0{,}96-1{,}96\times\dfrac{\sqrt{0{,}96\times0{,}04}}{\sqrt{300}}\,;0{,}96+1{,}96\times\dfrac{\sqrt{0{,}96\times0{,}04}}{\sqrt{300}}\right]$

$0{,}022 \leqslant 1{,}96\times\dfrac{\sqrt{0{,}96\times0{,}04}}{\sqrt{300}} \leqslant 0{,}023$

donc $I_{300}=[0{,}937\,;0{,}982]$

2. Pour le contrôle, il y a 283 pains commercialisables sur les 300.

La proportion f de l'échantillon est égale à $f=\dfrac{283}{300} \simeq 0{,}94$

0,94 appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique I_{300} donc pour le contrôle l'objectif est atteint au seuil de 95 %

Partie C

1. L'énoncé nous donne : P(T $\geqslant$ 30) = 0,913

La loi de probabilité de T est la loi exponentielle de paramètre λ donc la fonction de densité f est définie sur $\mathbb{R}$par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$.

F définie sur $\mathbb{R}$par $F(t)=-e^{-\lambda t}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$P(T \leqslant 30) = \int_0^{30} \lambda e^{-\lambda t} dt = F(30) - F(0) = -e^{-30\lambda} + 1$

$P(T \geqslant 30) = 1 - (1 - e^{-30\lambda}) = e^{-30\lambda}$

$e^{-30\lambda} = 0{,}913 \Leftrightarrow -30\lambda = \ln 0{,}913 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0{,}913}{30} \simeq 0{,}003$

donc $\lambda = 0{,}003$

2. La loi exponentielle de paramètre λ est une loi de durée de vie sans vieillissement donc
$P_{(T \geqslant 60)}(T \geqslant 90) = P(T \geqslant 90 - 60) = P(T \geqslant 30) = e^{-30\lambda} = 0{,}913$

3. On détermine t_0 (en jours) nombre entier maximal tel que $P(T \leqslant t_0) \leqslant 0{,}5$.

$1 - e^{-\lambda t_0} \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5 \geqslant e^{-\lambda t_0} \Leftrightarrow \ln 0{,}5 \geqslant -\lambda t_0 \Leftrightarrow -\dfrac{\ln 0{,}5}{\lambda} \leqslant t_0$

$\lambda = 0{,}003$ et en utilisant la calculatrice on obtient :

$231{,}05 \leqslant t_0$

<u>conclusion</u>

$t_0 = 331$ jours

$331 < 362$ donc le vendeur a tord.