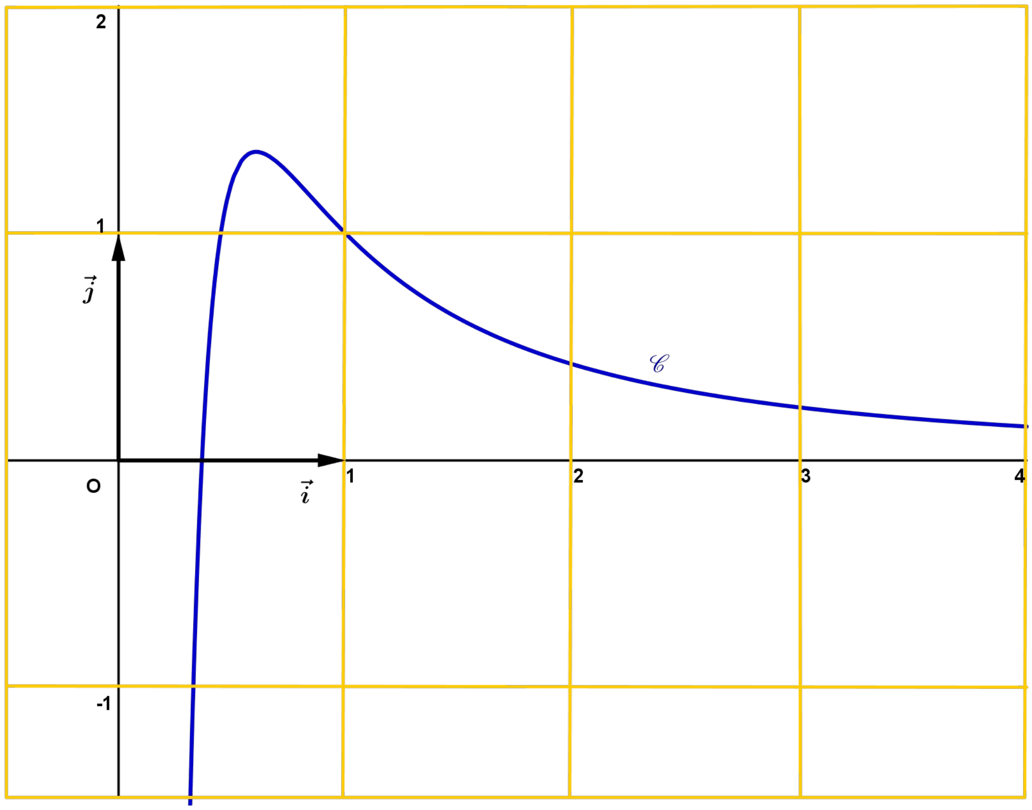
Exercice 4 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ et donnée ci-dessous :



1 a. Etudier la limite de f en 0.

b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de f en $+\infty$.

c. En déduire les asymptotes éventuelles la courbe $\mathscr{C}$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Démontrer que pour tout rée x appartenant l'intervalle $]0:+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{-1-2\ln(x)}{x^2}$$

b. Résoudre sur l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation $-1-\ln(x)>0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f .

3. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec axe des abscisses dont on précisera les coordonnées.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. Pour out entier n $\geqslant$ 1, on note I_n l'aire , exprimée en unités d'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives x = $\dfrac{1}{2}$ et x = n.

a. Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant e - \frac{1}{2}$

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=\frac{-2-\ln(x)}{x}$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Calculer I_n en fonction de n.

c. Etudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

CORRECTION

1. a. $f(x)=(1+\ln x)\times\frac{1}{x^2}$

x est un nombre réel strictement positif

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$

b. $\lim\limits_{x\to x+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

$f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x)}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x)}{x}\times\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=0$

On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

c. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$

$\lim\limits_{x\to+in}f(x)=0$ donc la droite d'équation y = 0 est ue asumptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. a. f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ donc

$$f'(x)=\frac{x^2\times\frac{1}{x}-2x(1+\ln x)}{x^4}=\frac{x-2x(1+\ln x)}{x^4}=\frac{1-2(1+\ln x)}{x^3}=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

b. $-1-2\ln x>0$ ⇔ -1 > 2lnx ⇔ $-\frac{1}{2}>\ln x$ ⇔ $e^{-\frac{1}{2}}>x$

car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$S=\left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$$

$$e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\simeq 0{,}61$$

Le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ est le signe de $-1-2\ln x$.

x	0 $\qquad\frac{1}{\sqrt{e}}\qquad$ $+\infty$
$-1-2\ln x$	‖ $+$ 0 $-$

c. Tableau de variations de f .

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1-12}{e^{-1}}=\frac{e}{2}\simeq 1{,}36$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	↘	0

3. a. $f(x)=0 \iff 1+\ln x=0 \iff \ln x=-1 \iff x=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0{,}37.$

donc la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses : $\mathrm{A}\left(\frac{1}{\mathrm{e}};0\right)$.

b. f est strictement croissante sur $\left]0;\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right[$ donc :

. si $0 < x < \frac{1}{\mathrm{e}}$ alors $f(x)<f(\mathrm{e})=0$

. si $\frac{1}{\mathrm{e}}<x<\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ alors $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=0<f(x)$ . . f

est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}};+\infty\right[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

donc si $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} < x$ alors $f(x)>0$

on donne le résultat sous forme de tableau

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	

4. a. n est un entier naturel supérieur ou égal à 1

f est continue et positive sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}};n\right]$ donc l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité

par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives : $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$

est $\mathrm{I}_n = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{n} \frac{1+\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\mathrm{I}_2 = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{2} \frac{1+\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Le maximum de f sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}};2\right]$ est égal à $\frac{\mathrm{e}}{2}$ donc le domaine délimité par l'axe des abscisses,

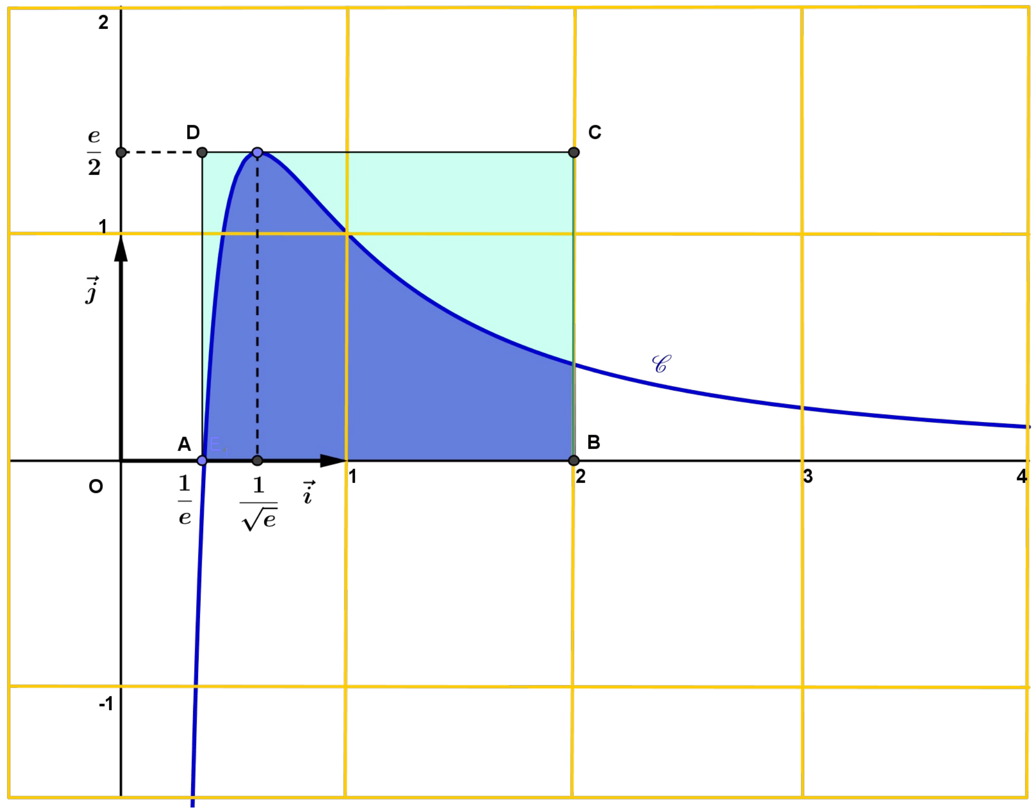
la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations : $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 2$ est contenu dans le rectangle ABCD

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{\mathrm{e}};0\right)$, $\mathrm{B}(2;0)$, $\mathrm{C}\left(2;\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$, $\mathrm{D}(\frac{1}{\mathrm{e}};\frac{\mathrm{e}}{2})$

L'aire, en unités d'aire, du rectangle ABCD est : $(2-\mathrm{e})\times\frac{\mathrm{e}}{2}$ soit $\mathrm{e}-\frac{1}{2}$

Conséquence

$$0 \leqslant I_2 \leqslant e-\frac{1}{e}$$



b. $F(x)=\dfrac{-2-\ln x}{x}$

F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

$$I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{n} \frac{1+\ln x}{x^2}\,dx = F(n)-F\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{-2-\ln(n)}{n}-\left(\frac{-2-\ln\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}}\right)$$

$$I_n = \frac{-2-\ln(n)}{n}-\left(\frac{-2+1}{\frac{1}{e}}\right)=\frac{-2-\ln(n)}{n}+e$$

c. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2}{n}=0$ et $\lim\limits_{x\to n+\infty}\dfrac{\ln(n)}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = e$.

L'aire, en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses sur $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$ est e.