Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour tout entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n-.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Justifier lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N°1	Algorithme N°2	Algorithme N°3
Variables: v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme:** Lire n v prend la valeur 1 pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables:** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme:** Lire n Pour i variant de 1à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables:** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme:** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

2. Pour n = 10 on obtient l'affichage suivant :

1	1.800	2.143	2.333	2.455	2.538	2.600	2.647	2.684	2.714

Pour n = 100, les derniers termes affichés sont :

2.967	2.968	2.968	2.968	2.969	2.969	2.969	2.970	2.970	2.970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel, $0 < v_n < 3$

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par :

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

2. En déquire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

CORRECTION

Partie A

1. $\boxed{\textbf{ALGORITHME 3}}$

- Le premier algorithme n'affiche que v_n
- Le deuxième algorithme affiche $v_n = v_{n-1} = \ldots = v_0 = 1$.
  (l'instruction précédent: Afficher v est l'instruction : v prend la valeur 1).
- Le troisième **convient** (il est nécessaire pour avoir l'affichage de v_n d'écrire l'instruction : Afficher v après l'instruction : Fin Pour.

2. Conjectures :

(v_n) est une suite croissante
(v_n) est une suite convergente

3. a. Remarque :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;6[$ par $f(x) = \dfrac{9}{6-x}$.

f est dérivable sur $]-\infty;6[$ et $f'(x) = \dfrac{9}{(6-x)^2} > 0$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty;6[$.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $0 < v_n < 3$

- Initialisation
  n = 0 $v_0 = 1$ donc $0 < v_0 < 3$
  La propriété est vérifiée pour n = 0.
- Hérédité
  Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose : $0 < v_n < 3$ et on doit démontrer : $0 < v_{n+1} < 3$.
  $0 < v_n < 3$ or f est une fonction strictement croissante sur $]-\infty;6[$
  donc $f(0) < f(v_n) < f(3)$ soit $\dfrac{9}{6} < v_{n+1} < \dfrac{9}{3}$ et $1{,}5 < v_{n+1} < 3$
  conséquence : $0 < v_{n+1} < 3$
- Conclusion
  Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n on a : $0 < v_n < 3$.

b. Pour tout entier naturel n

$$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6-v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6-v_n)}{6-v_n} = \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6-v_n} = \frac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$$

Or $0 < v_n < 3$ donc $6 - v_n > 0$ et $(3-v_n)^2 > 0$

Conclusion :

Pour tout entier naturel n $v_{n+1} - v_n > 0$ et **la suite (v_n) est strictement croissante.**

c. Pour tout entier naturel n on a $v_n < 3$ donc la suite (v_n) est majorée par 3.

Toute suite croissante et majorée est convergente donc **la suite (v_n) est convergente.**

(on ne peut pas affirmer que 3 est la limite)

Partie B

1. Nous savons que pour tout entier naturel n : $0 < v_n < 3$ donc $v_n - 3 \neq 0$ et la suite (w_n)

telle que $w_n=\frac{1}{v_n-3}$ est bien définie pour tout entier naturel n.

. Pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1}=\frac{1}{v_{n+1}-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-v_n}-3}=\frac{1}{\frac{9-3(6-v_n)}{6-v_n}}=\frac{6-v_n}{-9+3v_n}=\frac{6-v_n}{3(v_n-3)}$$

. $$w_{n+1}-w_n=\frac{6-v_n}{3(v_n-3)}-\frac{1}{v_n-3}=\frac{6-v_n-3}{3(v_n-3)}=\frac{3-v_n}{3(v_n-3)}=-\frac{1}{3}$$

$$w_0=\frac{1}{v_0-3}=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}$$

(w_n) est la suite arithmétique de premier $w_0=-\frac{1}{2}$ et de raison r = $-\frac{1}{3}$.

2. Pour tout entier naturel n on a $w_n = w_0 + nr$

donc $w_n = -\frac{1}{2} - \frac{n}{3}$

. Pour tout entier naturel n

$$w_n=\frac{1}{v_n-3} \Leftrightarrow \frac{1}{w_n}=v_n-3 \Leftrightarrow v_n=\frac{1}{w_n}+3=\frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{n}{3}}+3=-\frac{6}{3+2n}+3$$

3. $\lim_{n\to+\infty}(3+2n)=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{6}{3+2n}=0$

donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 3$**.**

