Exercice 1 5 points

Soit f la fonction dérivable,définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)= e^x + \frac{1}{x}$.

1 . Étude d'une fonction auxiliaire

a . Soit la fonction g dérivable, définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)= x^2 e^x - 1$.
Étudier le sens de variation de la fonction g.

b . Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0;+\infty[$ tel que : $g(\alpha)=0$.
Démontrer que α appartient à l'intervalle $]0,703;0,704[$.

c . Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2 . Étude de la fonction f

a . Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b . On note f ' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.
Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x)= \frac{g(x)}{x^2}$.

c . En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d . Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel : $m=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}$.

e . Justifier que $3,43<m<3,45$.

Correction :

1 . a . g est **dérivable** sur [0;+∞[.
$(e^x)'=e^x$
Donc, g'(x)= $2x\,e^x+x^2e^x$ = $\boxed{(x^2+2x)e^x}$
Pour tout nombre réel x positif ou nul on a e^x >0, donc **le signe de g'(x)** est le signe de $\boxed{x^2+2x}$.
$x^2+2x=x(x+2)$
Pour tout réel x positif ou nul on a : $x^2+2x\geqslant 0$ donc g'(x)$\geqslant$0
(g'(x)=0 ⇔ x=0)
g est strictement croissante sur [0;+∞[.

b . g(0)=-1 et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

g est **continue et strictement croissante** sur [0;+∞[à valeurs dans [-1;+∞[. 0∈ [-1;+∞[, **le théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d' affirmer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique a appartenant à [0;+∞[.
En utilisant la calculatrice :
$g(0{,}703)\simeq-0{,}0018<0$
$g(0{,}704)\simeq0{,}002>0$
g est strictement croissante sur [0;+∞[et g(0,703)<g(a)<g(0,704)
Donc, **0,703 < a < 0,704**

c . Si 0⩽x<a alors g(x)<g(a)=0
Si a<x alors 0=g(a)<g(x)
On donne le résultat **sous forme de tableau** :

x	0		a		+∞
$g(x)$		–	0	+	

2 . Étude de la fonction f

a . x∈]0;+∞[, f(x)= $e^x+\dfrac{1}{x}$

x>0 $\lim\limits_{x\to0} e^x=e^0=1$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b . f est **dérivable** sur]0;+∞[

$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

f '(x)= $e^x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2e^x-1}{x^2}=\boxed{\dfrac{g(x)}{x^2}}$

c . Le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ est le signe de $g(x)$ donc f est strictement décroissante sur $]0;a]$ et strictement croissante sur $[a;+\infty[$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

d . Le tableau de variations de f nous permet d'affirmer que f admet un minimum m sur $]0;+\infty[$ et que $m=f(a)$.

Or, $f(a)=e^a+\dfrac{1}{a}$ et $g(a)=0$

$g(a)=a^2e^a-1=0$ donc $e^a=\dfrac{1}{a^2}$

$$\boxed{m=f(a)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}}$$

e. On a $0{,}703<a<0{,}704$

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc $\dfrac{1}{0{,}704}<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{0{,}703}$.

En utilisant la calculatrice :

$1{,}4204<\dfrac{1}{a}<1{,}4225$

La fonction carré est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc $(0{,}703)^2<a^2<(0{,}704)^2$

et $\dfrac{1}{(0{,}704)^2}<\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{1}{(0{,}703)^2}$

En utilisant la calculatrice :

$2{,}0176<\dfrac{1}{a^2}<2{,}0235$

Donc, $3{,}4380<m<3{,}4460$

On obtient $3{,}43<m<3{,}45$

