Exercice 2 — 5 points

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=2$ et $v_0=10$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{3}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}$.

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables : N est un entier
U, V, W sont des réels
K est un entier
Début : Affecter 0 à K
Affecter 2 à U
Affecter 10 à V
Saisir N
Tant que K < N
    Affecter K+1 à K
    Affecter U à W
    Affecter $\frac{2U+V}{3}$ à U
    Affecter $\frac{W+3V}{4}$ à V
Fin Tant que
Afficher U
Afficher V
Fin

On exécute cet algorithme en saisissant N=2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

Partie B

1 .a. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{5}{12}(v_n-u_n)$.

b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2 .a. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
b. Déduire des résultats des questions 1.b et 2.a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.
c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3 . Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4 . Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante. En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

Correction :

Partie A

Remarque :
N est un entier, si N est un entier négatif ou nul alors il sera affiché U: 2 et V: 10
Pour compléter le tableau

- k=0 U= 2 et V= 10
- k=1 W=2 et $U=\frac{2\times 2+10}{3}=\frac{14}{3}$ et $V=\frac{2+3\times 10}{4}=\frac{32}{4}=8$
- k=2 $W=\frac{14}{3}$ et $U=\frac{2\times\frac{14}{3}+8}{3}=\frac{28+24}{9}=\frac{52}{9}$ et $V=\frac{\frac{14}{3}+3\times 8}{4}=\frac{14+72}{12}=\frac{86}{12}=\frac{43}{6}$

On obtient le tableau

K	W	U	V
0		0	10
1	0	$\frac{14}{3}$	8
2	$\frac{14}{3}$	$\frac{52}{9}$	$\frac{43}{6}$

Partie B

1 .a. Pour tout entier naturel n

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}-\frac{2u_n+v_n}{3}=\frac{3u_n+9v_n-8u_n-4v_n}{12}=\frac{5v_n-5u_n}{12}=\frac{5}{12}(v_n-u_n)$$

$$\boxed{v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{5}{12}(v_n-u_n)}$$

b. Pour tout entier naturel n : $w_n=v_n-u_n$ donc $w_{n+1}=\frac{5}{12}w_n$

(w_n) est la suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme : $w_0=v_0-u_0=10-2=8$

conséquence :

$$\boxed{w_n=8\left(\frac{5}{12}\right)^n}$$

2 .a. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+v_n}{3}-u_n=\frac{2u_n+v_n-3u_n}{3}=\frac{v_n-u_n}{3}=\frac{w_n}{3}>0 \text{ car } w_n=8\left(\frac{5}{12}\right)^n>0$$

La suite (u_n) est strictement croissante.

$$v_{n+1}-w_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\frac{u_n+3v_n-4v_n}{4}=\frac{u_n-v_n}{4}=-\frac{v_n-u_n}{4}=-\frac{w_n}{4}<0$$

La suite (v_n) est strictement décroissante.

b. pour tout entier naturel n
$w_n \geqslant 0$ donc $v_n - u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant u_n$
Or, (v_n) est décroissante donc $v_n \leqslant v_0 = 10$
<u>conséquence</u>
$\boxed{u_n \leqslant v_n \leqslant 10}$

On a aussi (u_n) est croissante donc $2 = u_0 \leqslant u_n$
<u>conséquence</u>
$\boxed{2 \leqslant u_n \leqslant v_n}$

c. (u_n) est une **<u>suite croissante est majorée</u>** par 10 donc (u_n) est **<u>convergente</u>**.
(v_n) est une **<u>suite décroissante et minorée</u>** par 2 donc (v_n) est **<u>convergente</u>**.

3. On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l'$.

On a pour tout entier naturel n : $w_n = v_n - u_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$

$0 < \frac{5}{12} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \underline{\mathbf{0}}$
On obtient $0 = l - l'$ soit **<u>l=l'</u>**
Les suites (u_n) et (v_n) ont donc **<u>la même limite</u>**.

4. Pour tout entier naturel n :
$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n = 3u_n + 4v_n = t_n$$
La suite (t_n) est donc une suite constante et pour tout entier naturel n :
$t_n = t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 46$
On a donc pour tout entier naturel n : $3u_n + 4v_n = 46$.
Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$ donc **<u>3l+4l=46</u>**
7l=46
et $l = \frac{46}{7}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \boxed{\frac{46}{7}}$.

