Exercice 3 *5 points*

Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au dix-millième.

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres. Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

1 . On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre en mm. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,4.
Montrer qu'une valeur approchée à 0,0001 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,0124. On pourra utiliser la table de valeurs donnée en annexe.

2 . On met en place un contrôle de production tel que 98 % des billes hors norme sont écartées et 99 % des billes correctes sont conservées.
On choisit une bille au hasard dans la production. On note :
N l'événement « la bille choisie est aux normes »
A l'événement « la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».

a. Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité de l'événement A.

c. Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes. On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de 0,0124. On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées. On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1 . Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?

2 . Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?

3 . Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?

4 . Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

ANNEXE

ANNEXE
Exercice 3

	A	B
1	d	$P(X < d)$
2	0	3.06E-138
3	1	2.08E-112
4	2	2.75E-89
5	3	7.16E-69
6	4	3.67E-51
7	5	3.73E-36
8	6	7.62E-24
9	7	3.19E-14
10	8	2.87E-07
11	9	0.00620967
12	10	0.5
13	11	0.99379034
14	12	0.99999971
15	13	1
16	14	1
17	15	1
18	16	1
19	17	1
20	18	1
21	19	1
22	20	1
23	21	1

copie d'écran d'une feuillede calcul

Correction :

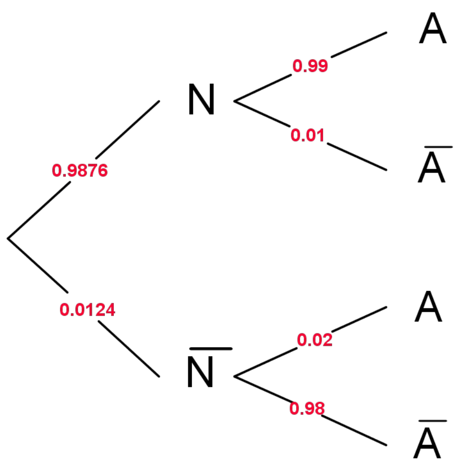
Partie A

1 . La probabilité qu'une bille soit hors norme est égale à $P(X<9)+P(X>11)$
Le tableau nous donne :
$P(X<9)=$ 0,00620967
$P(X<11)=$ 0,99379034

	A	B
1	d	$P(X<d)$
2	0	3.06E-138
3	1	2.08E-112
4	2	2.75E-89
5	3	7.16E-69
6	4	3.67E-51
7	5	3.73E-36
8	6	7.62E-24
9	7	3.19E-14
10	8	2.87E-07
11	9	0.00620967
12	10	0.5
13	11	0.99379034
14	12	0.99999971
15	13	1
16	14	1
17	15	1
18	16	1
19	17	1
20	18	1
21	19	1
22	20	1
23	21	1

$P(X>11)=1-P(X<11)=$0,00620966
Donc $P(X<9)+P(X>11)=0,00620967+0,00620966=$0,01241933
On a $0,0124<P(X<9)+P(X>11)<0,0125$
Conclusion :
0,0124 est une valeur approchée à 0,0001 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme.

2 . En utilisant la première question on a : $P(\bar{N})=0,0124$
On a donc : $P(N)=1-P(\bar{N})=1-0,0124=0,9876$ = 0,9876
L'énoncé nous précise que : $P_{\bar{N}}(\bar{A})=0,98$ et $P_N(A)=0,99$
Conséquences :
$P_{\bar{N}}(A)=0,02$ et $P_N(\bar{A})=0,01$
On obtient l'arbre pondéré suivant :



2 . En utilisant la formule des probabilités totales ou en utilisant l'arbre pondéré.

$P(A)=P(N)\times P_N(A)+P(\bar{N})\times P_{\bar{N}}(\bar{A})$

$P(A)=0{,}9876\times 0{,}99+0{,}0124\times 0{,}02=0{,}977724+0{,}000248=0{,}977972$

à 0,0001 près, P(A)=0,9780

3 . On nous demande de calculer : $P_A(\bar{N})$

$P_A(\bar{N})=\frac{P(A\cap\bar{N})}{P(A)}=\frac{0{,}000248}{0{,}978}=0{,}000253$

$P_A(\bar{N})$ =0,0003

Partie B

1 . On considère l'épreuve de Bernoulli : on tire au hasard une bille dans l'ensemble des billes fabriquées.
Le succès : S « la bille tirée est hors norme » et P(S)=0,0124
L'échec : $\bar{S}$ « la bille tirée n'est pas hors norme » et $P(\bar{S})$ =0,9876
Les tirages sont « effectuées avec remise » (hypothèse).
Y est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 100 épreuves.

La loi de probabilité de Y est la loi binomiale de paramètres : n=100 et p=0,0124.

2 . L'espérance mathématique est égale à : np= $100\times 0{,}0124$ =1,24
E(Y)=1,24
La variance est égale à : npq= $1{,}14\times 0{,}9876$ =1,224624
V(Y)=1,2246
V= σ^2
L'écart type : σ=1,1066.

3 . La probabilité d'avoir exactement 2 billes hors norme est :

$\binom{100}{2} x (0{,}0124)^2\times(0{,}9876)^{98}\simeq$ 0,2241

4 . La probabilité pour que les 100 billes ne soient pas hors norme est :
$(0{,}9876)^{100} \simeq$ **0,2872**

La probabilité d'avoir exactement une bille hors norme est :
$\binom{100}{1} \times (0{,}0124) \times (0{,}9876)^{99} \simeq$ **0,3605**

La probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme est :
$0{,}2872 + 0{,}3605 =$ **0,6477**