Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}\ ; \vec{v}\ )$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1 . Proposition : Pour tout entier naturel n **:** $(1+i)^{4n}=(-4)^n$ **.**

2 . Soit (E) l'équation $(z-4)(z^2-4z+8)=0$ où z désigne un nombre complexe.
Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3 . Proposition : Pour tout nombre réel α, $1+e^{2i\alpha}=2e^{i\alpha}\cos(\alpha)$

4 . Soit A le point d'affixe $z_A=\frac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Proposition : Si n-1 est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5 . Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

Proposition : $1+j+j^2=0$

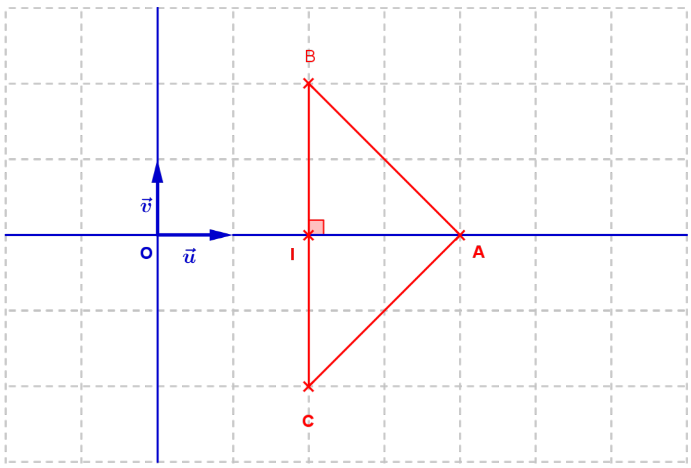
Correction :

1 . Proposition VRAIE

preuve :
$(1+i)^4=[(1+i)^2]^2=(1+2i+i^2)^2=(1+2i-1)^2=(2i)^2=4i^2=-4$
Pour tout entier naturel n
$(1+i)^{4n}=[(1+i)^4]^n=(-4)^n$
(on convient pour n=0 que $(1+i)^0=1$ et que $(-4)^0=1$)

2 . Proposition FAUSSE

preuve :
(E) $(z-4)(z^2-4z+8)=0 \Leftrightarrow$ (z=4 ou $z^2-4z+8=0$)
$z^2-4z+8=0$
Δ=16- 4×8 =-16< 0
$\Delta=(4i)^2$
Les deux solutions conjuguées de cette équation sont :
$z_1=\dfrac{4+4i}{2}=2+2i$
$z_2=\bar{z}_1=\dfrac{4-4i}{2}=2-2i$
Les trois solutions de l'équation (E) sont : 4 ; 2+2i ; 2–2i
On considère les trois points du plan complexe
A(4), B(2+2i) et C(2–2i)



Le triangle ABC est isocèle en A.
I est le milieu de [BC] I(2)
$\overrightarrow{BC}$ (-4i) BC=4
$\overrightarrow{AI}$ (2) AI=2
(AI) est la hauteur du triangle ABC issue de A.
L'aire (en unités d'aire) du triangle ABC est : $\boxed{\dfrac{BC\times AI}{2}=\dfrac{4\times 2}{2}=4}$.

3 . Proposition VRAIE

preuve :

Première méthode

$1+e^{2i\alpha}=e^{i\alpha}\times e^{-i\alpha}+e^{i\alpha}\times e^{i\alpha}=e^{i\alpha}(e^{-i\alpha}+e^{i\alpha})$

Or, $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ et $e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$

On obtient $e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}=2\cos\alpha$

Donc, $\boxed{1+e^{2i\alpha}=2e^{i\alpha}\cos\alpha}$

Deuxième méthode

$e^{2i\alpha}=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$

Or, $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ et $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$1+e^{2i\alpha}=1+2\cos^2\alpha-1+2i\sin\alpha\cos\alpha=2\cos\alpha(\cos\alpha+i\sin\alpha)=2\cos\alpha\, e^{i\alpha}$

$\boxed{1+e^{2i\alpha}=2e^{i\alpha}\cos\alpha}$

4 . Proposition VRAIE

preuve :

$A\left(\frac{1}{2}(1+i)\right)$

n-1 est **divisible par 4** donc il **existe un entier naturel k** tel que n-1=4k et **n=4k+1**

$M_n((z_A)^n)$ $\qquad (z_A)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(1+i)^n$

$(1+i)^{4k+1}=[(1+i)^4]^k\times(1+i)=(-4)^k\times(1+i)$

$(z_A)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+1}\times(-4)^k\times(1+i)=\left(\frac{1}{2}\right)^{4k}\times(-4)^k\times\left[\frac{1}{2}(1+i)\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^{4k}\times(-4)^k\times z_A$

$(z_A)^n=\lambda z_A$ avec $\lambda=\left(-\frac{1}{4}\right)^k$

$\overrightarrow{OA}\ (z_A)$ $\qquad \overrightarrow{OM_n}\ (\lambda z_A)$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM_n}$ sont **colinéaires**

Les points O; A et M_n sont donc **alignés**.

5 . Proposition VRAIE

$j=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

$\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\frac{2\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

On remarque : $j^2=\bar{j}$

$\boxed{1+j+j^2=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0}$