Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On note E l'ensemble des vingt-sept nombres entiers compris entre 0 et 26. On note A l'ensemble dont les éléments sont les 26 lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots, noté « ∗ » considéré comme un caractère. Pour coder les éléments de A, on procède de la manière suivante :

. Premièrement : on associe à chaque lettre de l'alphabet, rangées par ordre alphabétique, un nombre entier naturel compris entre 0 et 25, rangés par ordre croissant.

On a donc $a\rightarrow 0$, $b\rightarrow 1$, … , $z\rightarrow 25$

On associe au séparateur « ∗ » le nombre 26.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	★
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

On dit que a a pour rang 0, b a le rang 1, …., z a pour rang 25 et le séparateur « ∗ » a pour rang 26.

. Deuxièmement: à chaque élément x de E, l'application g associe le reste de la division euclidienne de $4x+3$ par 27. On remarquera que pour tout x de E, g(x) appartient à E.

. Troisièmement : Le caractère initial est alors remplacé par le caractère de rang g(x).

Exemple :
$s\rightarrow 18$, g(18)=21 et $21\rightarrow v$, donc la lettre s est remplacée lors du codage par la lettre v.

1 . Trouver tous les entiers x de E tels que g(x)=x c'est à dire invariant par g. En déduire les caractères invariants dans ce codage.

2 . Démontrer que, pour tout entier naturel x appartenant à E et tout entier naturel y appartenant à E si $y\equiv 4x+3(27)$ alors $x\equiv 7y+6(27)$.
En déduire que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.

3 . Proposer une méthode de décodage.

4 . Décoder le mot « vfv ».

Correction :

1 . g(x)=x ⇔ $4x+3=x(27)$ ⇔ $4x+3=x+27k$ (avec k entier relatif) ⇔ $3=27k-3x$ ⇔ $9k-x=1$
On effectue la résolution de cette équation (k et x sont des entiers relatifs).
Le couple (1 ; 8) est **une solution particulière** de cette équation.
$9k-x=1$ et $9\times1-8=1$ on obtient $9k-x=9\times1-8$ soit $9(k-1)=x-8$

9 divise x-8 donc x-8 = 9λ avec λ entier relatif .
$x-8=9(k-1)$ ⇔ $9\lambda=9(k-1)$ ⇔ $\lambda=k-1$ ⇔ $k=\lambda+1$ et on a $\boxed{x=9\lambda+8}$

Vérification
Pour tout entier relatif λ on a $9k-x=9(\lambda+1)-(9\lambda+8)=1$
Les solutions de l'équation $9k-x=1$ dans l'ensemble des entiers relatifs sont les couples (λ+1 ; 9λ+8) avec λ entier relatif.
L'élément x appartient à E donc $0\leqslant x\leqslant 26$
$0\leqslant 9\lambda+8\leqslant 26$ ⇔ $-8\leqslant 9\lambda\leqslant 18$ ⇔ $-\frac{8}{9}\leqslant\lambda\leqslant 2$
λ est un entier relatif donc les valeurs possibles pour λ sont : 0 ; 1 ; 2.
Les **solutions** pour x sont **8;17;26**.
Les **caractères invariants** dans ce codage sont : **i;r ;***

2 . Si $y\equiv 4x+3(27)$ alors $7y\equiv 7(4x+3)(27)$
Soit $7y\equiv 28x+21(27)$
Or, $28\equiv 1(27)$
$7y\equiv x+21(27)$ et $7y-21\equiv x(27)$
Or, $-21\equiv 6(27)$ car -21+27=6
On obtient $\boxed{x\equiv 7y+6(27)}$

Pour démontrer la proposition : »Deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts » est vraie, on démontre la contraposée : « Si deux caractères codés sont égaux alors les deux caractères initiaux sont égaux ».

x_1 et x_2 sont deux éléments de E donc $0\leqslant x_1\leqslant 26$ et $0\leqslant x_2\leqslant 26$
$g(x_1)=y_1$ et $g(x_2)=y_2$
Si $y_1=y_2$ alors $7y_1+6=7y_2+6$ donc $x_1\equiv x_2(27)$
Or, $0\leqslant x_1\leqslant 26$ et $0\leqslant x_2\leqslant 26$
On obtient $x_1=x_2$
conclusion
Deux caractères sont codés par deux caractères distincts.

3 . x est un élément de E, g(x)=y, et y est un élément de E
On considère l'application h de E dans E qui à y associe x : le reste de la division euclidienne de 7y + 6 par 27.

v : 21=y
$7\times21+6=153=5\times27+18$
18 : s
remarque :
Le **codage de s est v** donc le **décodage de v est s**.

f : 5
$7\times5+6=41=1\times27+14$
14 : o

Le décodage de vfv est sos.