Exercice 1 — 5 points

Partie A

Restitution organisée de connaissances

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et soit P un plan.
On considère deux droites sécantes et contenues dans P : D_1 de vecteur directeur $\vec{u_1}$ et la droite D_2 de vecteur $\vec{u_2}$;
Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et à D_2.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points :
$A(0;-1;1)$, $B(4;-3;0)$ et $C(-1;-2;-1)$.
On appelle P le plan passant par A,B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 3t-1 \\ z = -2t+8 \end{cases}$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1 . Affirmation 1 : Δ est orthogonale à toute droite du plan P .

2 . Affirmation 2 : Les droites Δ et (AB) sont coplanaires.

3 . Affirmation 3 : Le plan P a pour équation cartésienne $x+3y-2z+5=0$.

4 . On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Affirmation 4 : La droite D est strictement parallèle au plan d'équation : $x+3y-2z+5=0$.

CORRECTION

Partie A

Si Δ est orthogonale à toute droite de P alors Δ est orthogonale à D_1 et D_2 donc pour démontrer la propriété, il suffit de démontrer que si Δ est orthogonale à D_1 et D_2 alors Δ est orthogonale à toute droite de P.
Δ est orthogonale à D_1 donc $\vec{v}$ et $\vec{u_1}$ sont orthogonaux et $\vec{v}.\vec{u}_1=0$.
Δ est orthogonale à D_2 donc $\vec{v}$ et $\vec{u_2}$ sont orthogonaux et $\vec{v}.\vec{u}_2=0$
D_1 et D_2 sont sécantes en O donc $(O;\vec{u}_1;\vec{u}_2)$ est un repère du plan.
Soit D une droite quelconque de P de vecteur directeur : $\vec{u}$.
On a donc $\vec{u}=a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2$ $a_1\in\mathbb{R}$ et $a_2\in\mathbb{R}$

$\vec{v}.\vec{u}=\vec{v}.(a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2)=a_1(\vec{v}.\vec{u}_1)+a_2(\vec{v}.\vec{u}_2)=0$ **donc Δ est orthogonale à D.**

Partie B

1 . $\boxed{\textbf{Affirmation 1 : VRAIE}}$

On vérifie d'abord que les points : A;B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les A;B et C ne sont pas alignés et les droites $D_1 = (AB)$ et $D_2 = (AC)$ sont deux droites sécantes en A du plan P.

Δ est la droite passant par le point $E(0;-1;8)$ et de vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\vec{w}=4\times1-2\times3-1\times(-2)=4-6+2=0$

$\overrightarrow{AC}.\vec{w}=-1\times1-1\times3-2\times(-2)=-1-3+4=0$

donc Δ est orthogonale à deux droites sécantes de P et Δ est orthogonale à toute droite du plan P.

2 . $\boxed{\textbf{Affirmation 2 : FAUSSE}}$

Δ et (AB) sont orthogonales donc ne sont pas parallèles.
Les droites Δ et (AB) sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes.

Représentation paramétrique de (AB) : $\begin{cases}x=4t'\\y=-2t'-1\\z=-t'+1\end{cases}$ $t'\in\mathbb{R}$

On détermine l'intersection de Δ et (AB)

$\begin{cases}t=4t'\\3t-1=-2t'-1\\-2t+8=-t'+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=4t'\\12t'-1=-2t'-1\\-8t'+8=-t'+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=4t'\\t'=0\\t'=1\end{cases}$

Donc les droites Δ et (AB) ne sont pas sécantes et Δ et (AB) ne sont pas coplanaires.

3 . $\boxed{\textbf{Affirmation 3 : VRAIE}}$

Les points A;B et C ne sont pas alignés, il suffit donc de démontrer que les coordonnées des trois points vérifient l'équation : $x+3y-2z+5=0$.
A : $0-3-2+5=0$
B : $4-9+0+5=0$
C : $-1-6+2+5=0$

donc P : $x+3y-2z+5=0$.

4 . $\boxed{\textbf{Affirmation 4 : VRAIE}}$

$\vec{N}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P ; $\vec{u}\begin{pmatrix}11\\-1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

$\vec{N}.\vec{u}=1\times 11+3\times(-1)+(-2)\times 4=0$
donc D est parallèle à P.

O appartient à la droite D et O n'appartient pas au plan P car $0+3\times 0-2\times 0+5=5\neq 0$
La droite D n'est pas contenue dans le plan P.
<u>Conclusion</u>
La droite D est strictement parallèle au plan P.