Exercice 2 6 points

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = k\,e^{-kx}$$

On note C_k sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

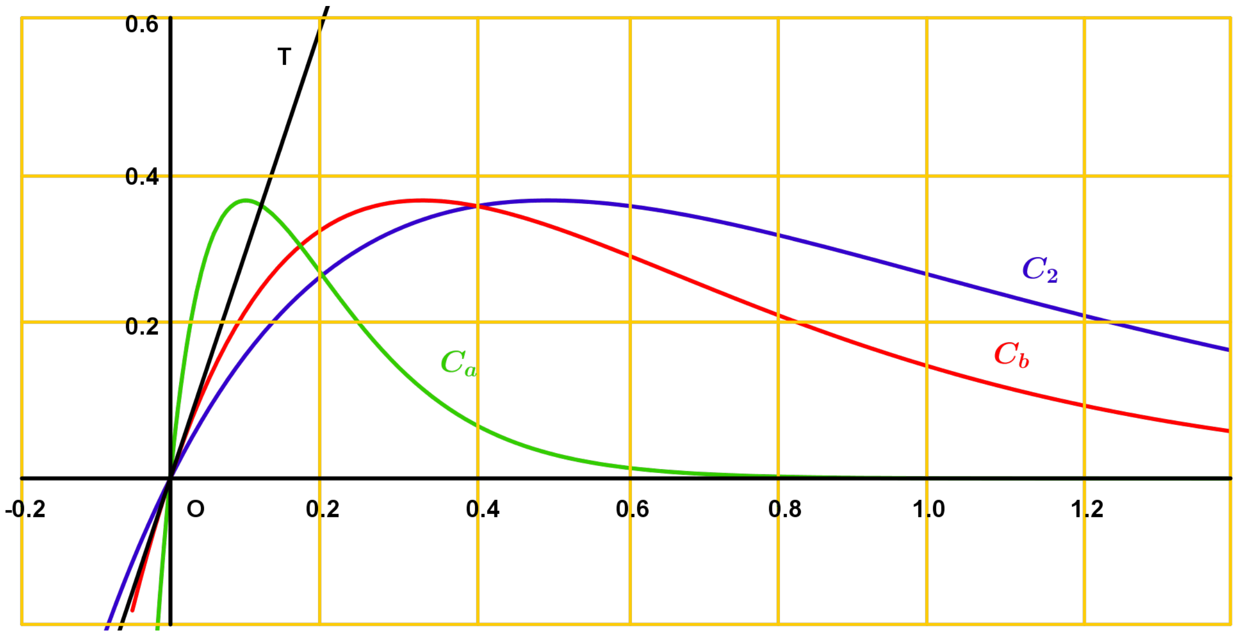
Partie A : Etude du cas k = 1

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x\,e^{-x}$.

1 . Déterminer les limites de la fonction f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire que la courbe C_1 admet une asymptote que l'on précisera.
2 . Etudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$
3 . Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g_1(x) = -(x+1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$
4 . Etudier le signe de f_1 (x) suivant les valeurs du nombre réel x.
5 . Calculer,en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = ln10.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes C_2, C_a et C_b où a et b sont des réels strictement positifs et T la tangente à C_b au point O origine du repère.



1 . Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes C_k passent par un même point.
2 .a. Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a :

$$f_k'(x) = k(1-kx)e^{-kx}$$

b. Justifier que pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum

c . En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

d. Ecrire une équation de la tangente à C_k au point O origine du repère.

e. En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.

CORRECTION

Partie A

f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=x\,e^{-x}$

1. $\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

conséquence : $\lim_{x\to-\infty}x\,e^{-x}=-\infty$ soit $\lim_{x\to-\infty}f_1(x)=-\infty$

. $f_1(x)=\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}$ $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$

conséquence : $\lim_{x\to+\infty}f_1(x)=0$

La droite d'équation y = 0 (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à C_1 en $+\infty$.

2. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$

$(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{-x})'=-e^{-x}$

et $f_1'(x)=e^{-x}-x\,e^{-x}=(1-x)e^{-x}$

pour tout nombre réel x, on a : $e^{-x}>0$ donc le signe f_1' (x) est le signe de : 1-x.

f_1 est croissante sur $]-\infty\ ;1]$ et f_1 est décroissante sur $[1\ ;+\infty[$.

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$f_1(1)=1\times e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

3. g_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_1(x)=-(x+1)e^{-x}$

g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g_1'(x)=-e^{-x}-(x+1)(-e^{-x})=-e^{-x}+x\,e^{-x}+e^{-x}=x\,e^{-x}=f_1(x)$

donc g_1 est une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$

4. $f_1(x)=x\,e^{-x}$

Pour tout nombre réel x, on a : $e^{-x}>0$ donc le signe de f_1 (x) est le signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1(x)$		$-$	0	$+$	

5. f_1 est continue et positive sur [0 ; ln10] donc l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe C_1 , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = ln10

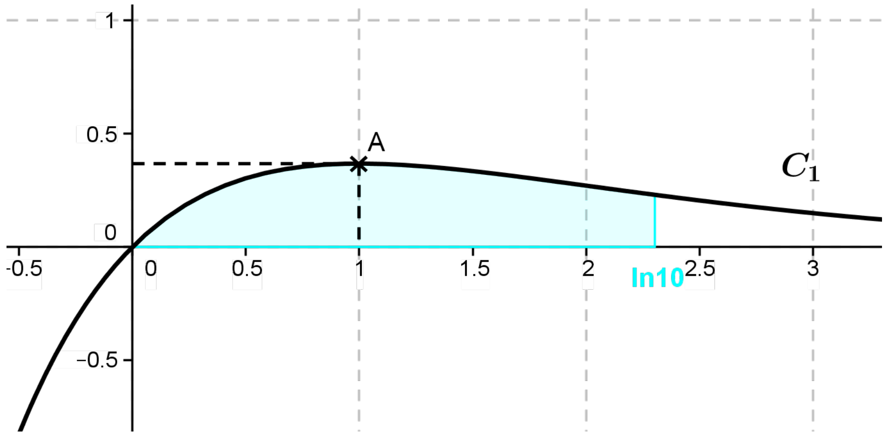
est $\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^{\ln 10}f_1(x),x\,dx$.

g_1 est une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$

$\mathscr{A} = g_1(\ln 10) - g_1(0) = -(\ln 10+1)\mathrm{e}^{-\ln 10} + \mathrm{e}^0 = -(\ln 10+1)\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{10}\right)} + 1 = -(\ln 10+1) \times \frac{1}{10} + 1$

$\mathscr{A} = \frac{9}{10} - \frac{1}{10}\ln 10 \text{ U.A.} \quad \simeq 0{,}67 \text{ U.A.}$

La courbe C_1 n'est pas demandée dans l'énoncé, toutefois on joint une représentation graphique.



Partie B

f_k est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = kx\,\mathrm{e}^{-kx}$ avec k nombre réel strictement positif.

1 . En regardant la figure de l'énoncé on conjecture que les courbes C_k passant par l'origine.
On vérifie :
Pour tout réel k strictement positif : $f_k(0) = k \times 0 \times \mathrm{e}^0 = 0$
donc toutes les courbes C_k passent par le point $O(0;0)$

2 .a. f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$
on a : $(\mathrm{e}^{-kx})' = -k\,\mathrm{e}^{-kx}$
donc $f_k'(x) = k\mathrm{e}^{-kx} + kx(-k\,\mathrm{e}^{-kx}) = (k - k^2x)\mathrm{e}^{-kx} = k(1-kx)\mathrm{e}^{-kx}$

$f_k'(x) = k(1-kx)\mathrm{e}^{-kx}$

b. Le signe de f_k' est le signe $1 - kx$ car $k > 0$.

$1 - kx \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k} - x \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k} \geqslant x$

On donne les variations sous forme de tableau

Donc f_k admet un maximum pour $\frac{1}{k}$ et $f_k\left(\frac{1}{k}\right) = k \times \frac{1}{k} \times \mathrm{e}^{-k\times\frac{1}{k}} = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

Le maximum de f_k est $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

c. L'abscisse du maximum de f_a est inférieure à celle de f_2 donc $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$

soit **$a < 2$**

d. T passe par $O(0;0)$ et $B(0{,}2;0{,}6)$

T =(OB) le coefficient directeur de T est : $m = \frac{0{,}6-0}{0{,}2-0} = 3$

T a pour équation : **$y = 3x$**

e. Première méthode

T est la tangente à C_b à l'origine donc $f_b'(0)=m=3$

or $f_b'(x)=b(1-bx)e^{-bx}$ et $f_k'(0)=b$

Conséquence : **b = 3**

<u>Deuxième méthode</u>

On détermine graphiquement l'abscisse du point d'ordonnée : $\frac{1}{e}$ de C_b .

On place le point M puis le point H (projeté orthogonal de M sur (x'x)).

On ne peut que proposer 0,3 par lecture graphique (le logiciel géogébra donne : 0,32)

Donc $\frac{1}{b}=0{,}3 \Leftrightarrow b=\frac{1}{0{,}3}=\frac{10}{3} \simeq 3{,}33$