Exercice 3 — 4 points

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui associe sa longueur en millimètre et Y la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 36$ et d'écart type $\sigma_1 = 0{,}2$ et que Y suit la loi normale de moyenne $\mu_2 = 6$ et d'écart type $\sigma_2 = 0{,}05$.

1 . Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1 - 3\sigma_1$ et $\mu_1 + 3\sigma_1$. Quelle est une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité p_1 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur ?

2 . Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre 5,88 mm et 6,12 mm. Le tableau donné ci-après a été obtenu à l'aide d'un tableur. Il indique pour chacune des valeurs de k, la probabilité que Y soit inférieure ou égal à cette valeur.
Déterminer à 10^{-3} près la probabilité p_2 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre (on pourra s'aider du tableau ci-après).

k	P(Y≤k)
5.8	3.16712E-05
5.82	0.000159109
5.84	0.000687138
5.86	0.00255513
5.88	0.008197538
5.9	0.022750132
5.92	0.054799292
5.94	0.11506967
5.96	0.211855399
5.98	0.344578258
6	0.5
6.02	0.655421732
6.04	0.788144601
6.06	0.88493033
6.08	0.945200708
6.1	0.977249868
6.12	0.991802464
6.14	0.99744487
6.16	0.999312862
6.18	0.999840891
6.2	0.999968329

3 . On prélève une pièce au hasard. On appelle :
L l'événement « La pièce est conforme pour la longueur »
D l'événement « la pièce est conforme pour le diamètre »
On suppose que les événements L et D sont indépendants.

a. Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre. Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée (le résultat sera arrondi à 10^{-2})

b. Justifier que la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur est égale à p_2 .

CORRECTION

1 . X suit la loi normale de moyenne : $\mu_1 = 36$ et d'écart type $\sigma_1 = 0{,}2$, soit $\mathcal{N}(36;0{,}04)$.

$p_1 = P(\mu_1 - 3\sigma_1 \leqslant X \leqslant \mu_1 + 3\sigma_1) = P(35{,}4 \leqslant X \leqslant 36{,}6) = 0{,}997$ (à 10^{-3} près)

$p_1 = 0{,}997$ (Résultat de cours)

2 . $p_2 = P(5{,}88 \leqslant Y \leqslant 6{,}12) = P(Y \leqslant 6{,}12) - P(Y \leqslant 5{,}88)$

par lecture du tableau

$p_2 = 0{,}991802464 - 0{,}008197536 = 0{,}983604928$

$p_2 = 0{,}984$ (à 10^{-3} près)

3 .a. La probabilité que la pièce soit acceptée est : $P(D \cap L)$

$P(D \cap L) = P(D) \times P(L) = p_1 \times p_2$

car les événements D et L sont indépendants.

La probabilité qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée est :

$P(\overline{D \cap L}) = 1 - P(D \cap L) = 1 - p_1 * p_2$

$P(\overline{D \cap L}) = 0{,}02$

b. On nous demande de calculer : $P_{\bar{L}}(D)$

$P_{\bar{L}}(D) = \dfrac{P(D \cap \bar{L})}{P(\bar{L})}$

les événements D et L sont indépendants donc les événements D et $\bar{L}$ sont indépendants.

Justification

En utilisant la formule des probabilités totales on a :

$P(D) = P(D \cap L) + P(D \cap \bar{L})$

$P(D \cap \bar{L}) = P(D) - P(D \cap L) = P(D) - P(D) \times P(L) = P(D) \times [1 - P(L)] = P(D) \times P(\bar{L})$

$$P_{\bar{L}}(D) = \frac{P(D) \times P(\bar{L})}{P(\bar{L})} = P(D) = p_2$$