Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignemenr de spécialité 5 points

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

A et X sont des nombres entiers
Saisir un entier positif A
Affecter à X la valeur A
Tant que X supérieur ou égal à 26 Affecter à X la valeur X – 26
Fin du Tant que
Afficher X

1 . Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3 ?
2 . Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?
3 . Pour un nombre entier saisi quelconque que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

Partie B

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes

. **Etape 1 :** chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

. **Etape 2 :** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y_i \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

La matrice C = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée matrice de codage.

. **Etape 3 :** $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que $z_1 \equiv y_1$ (26) avec $0 \leqslant z_1 \leqslant 25$

et $z_2 \equiv y_2$ (26) avec $0 \leqslant z_2 \leqslant 25$

. **Etape 4 :** $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné à l'étape 1.

Exemple : RE → $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$ → DP

Le bloc RE est donc codé en DP

Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1 . Soient x_1, x_2, x_i', x_2' quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $3x_1+x_2\equiv 3x_1'+x_2'$ (26) et $5x_1+2x_2\equiv 5x_1'+2x_2'$ (26).

b. En déduire que $x_1\equiv x_1'$ (26) et $x_2\equiv x_2'$ (26) puis que $x_1=x_1'$ et $x_2=x_2'$

2 . On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

a. Vérifier que la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C.

b. Calculer y_1 et y_2 tels que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

c . Calculer x_1 et x_2 tels que $x_1\equiv y_1$ (26) avec $0 \leqslant x_1 \leqslant 25$ et $x_2\equiv y_2$ (26) avec $0 \leqslant x_2 \leqslant 25$.

d. Quel procédé de décodage peut-on conjecturer ?

3 . Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.

On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du codage.

Soient y_1' et y_2' tels que $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient x_1 et x_2 les nombres entiers tels que $x_1\equiv y_1'$ (26) avec $0 \leqslant x_1 \leqslant 25$ et $x_2\equiv y_2'$ (26) avec $0 \leqslant x_2 \leqslant 25$.

Montrer que $3x_1+x_2\equiv z_1$ (26) et $5x_1+2x_2\equiv z_2$ (26).

Conclure.

4 . Décoder QC.

CORRECTION

Partie A :

1 . Lorsque l'on saisit : 3 < 26
Le nombre affiché est **3**.

2. Lorsque l'on saisit : 55 ⩾ 26
1ère boucle : X = 55 – 26 = 29 ⩾ 26
2ère boucle : X = 29 – 26 = 3 < 26
Le nombre affiché est **3.**

3 . Le résultat fourni par cet algorithme est le reste de la division euclidienne de A par 26.

Parties B :

Dans cet exercice on utilise les matrices colonnes.

Justification pour l'exemple.

. Etape 1 :
Le code de R est : 17
Le code de E est : 4
donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$

. Etape 2 :
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times17 + 1\times4 \\ 5\times17 + 2\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$
donc $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$

. Etape 3 :
z_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26.
z_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
$55 = 2\times26+3$ $\quad 0 \leqslant 3 \leqslant 25$
$93 = 3\times26+15$ $\quad 0 \leqslant 15 \leqslant 25$
et $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$
3 et le code de D et 15 est le code de P.
Le bloc **RE** est donc codé en **DP**.

1 .a. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 \\ y_2 = 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$

et $\begin{cases} z_1 \equiv y_1 (26) \\ z_2 \equiv y_2 (26) \end{cases}$ avec $\begin{cases} 0 \leq z_1 \leq 25 \\ 0 \leq z_2 \leq 25 \end{cases}$

de même $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} y_1' = 3x_1' + x_2' \\ y_2' = 5x_1' + 2x_2' \end{cases}$ et $\begin{cases} z_1 \equiv y_1' (26) \\ z_2 \equiv y_2' (26) \end{cases}$

On obtient donc

$\begin{cases} y_1 \equiv y_1'(26) \\ y_2 \equiv y_2'(26) \end{cases}$ soit $\begin{cases} 3x_1+x_2 \equiv 3x_1'+x_2'(26) (\alpha) \\ 5x_1+2x_2 \equiv 5x_1'+2x_2'(26) (\beta) \end{cases}$

b. En utilisant les propriétés des congruences

$2(\alpha)-(\beta)$

$2(3x_1+x_2)-(5x_1+2x_2) \equiv 2(3x_1'+x_2')-(5x_1'+2x_2')(26)$ soit $x_1 \equiv x_1'(26)$

$3(\beta)-5(\alpha)$

$3(5x_1+2x_2)-5(3x_1+x_2) \equiv (5x_1'+2x_2')-5(3x_1'+x_2')(26)$ soit $x_2 \equiv x_2'(26)$

$x_1 \equiv x_1'(26)$ donc $x_1 = x_1' + 26k$ avec k entier relatif

$x_1 - x_1' = 26k$

or $0 \leq x_1 \leq 25$ et $0 \leq x_1' \leq 25$ donc $-25 \leq x_1 - x_1' \leq 25$

Le seul multiple de 26 compris entre -25 et 25 est 0 donc $x_1 = x_1'$

De même $y_1 = y_1'$

2 .a. $C \times C' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2 - 5\times 1 & -1\times 3 + 1\times 3 \\ 5\times 2 - 5\times 2 & -1\times 5 + 2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On vérifie de même que

$C' \times C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(remarque : on peut utiliser la calculatrice).

Conclusion :

C' est la matrice inverse de C.

b. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3 - 1\times 15 \\ -5\times 3 + 3\times 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 30 \end{pmatrix}$

c. x_1 est le reste de la division euclidienne de -9 par 26.

x_2 est le zeste de la division euclidienne de 30 par 26.

$\begin{cases} -9 = -1\times 26 + 17 \\ 30 = 1\times 26 + 4 \end{cases}$ donc $x_1 = 17$ et $x_2 = 4$.

d. Le décodage s'opère de la même manière que le codage mais en remplaçant en remplaçant la matrice C par la matrice C'.

3 . $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} y_1' = 2z_1 - z_2 \\ y_2' = -5z_1 + 3z_2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 \equiv y_1'(26) \\ x_2 \equiv y_2'(26) \end{cases}$ avec $\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 25 \\ 0 \leq x_2 \leq 25 \end{cases}$

on obtient $\begin{cases} x_1 \equiv 2z_1 - z_2 (26) (a) \\ x_2 \equiv -5z_1 + 3z_2 (26) (b) \end{cases}$

En utilisant les propriétés des congruences

3(a)+(b)

$3x_1 + x_2 \equiv 3(2z_1 - z_2) - 5z_2 + 3z_2 (26)$ soit $3x_1 + x_2 \equiv z_1 (26)$

5(a)+2(b)

$5x_1 + 2x_2 \equiv 5(2z_1 - z_2) + 22(-5z_1 + 3z_2)(26)$ soit $5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 (26)$

$\begin{cases} z_1 \equiv 3x_1 + x_2 (26) \\ z_2 \equiv 5x_1 + 2x_2 (26) \end{cases}$ avec $\begin{cases} 0 \leq z_1 \leq 25 \\ 0 \leq z_2 \leq 25 \end{cases}$

or $y_1 = 3x_1 + x_2$ et $y_2 = 5x_1 + 2x_2$

z_1 et z_2 sont les restes des divisions euclidiennes de y_1 et y_2 par 26

et $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est le transformé de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ par le codage et pour décoder il suffit d'utiliser C'.

4. QC $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -74 \end{pmatrix}$

$30 = 1 \times 26 + 4$ $x_1 = 4$

$-74 = -3 \times 26 + 4$ $x_2 = 4$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ le décodage de QC est **EE**.