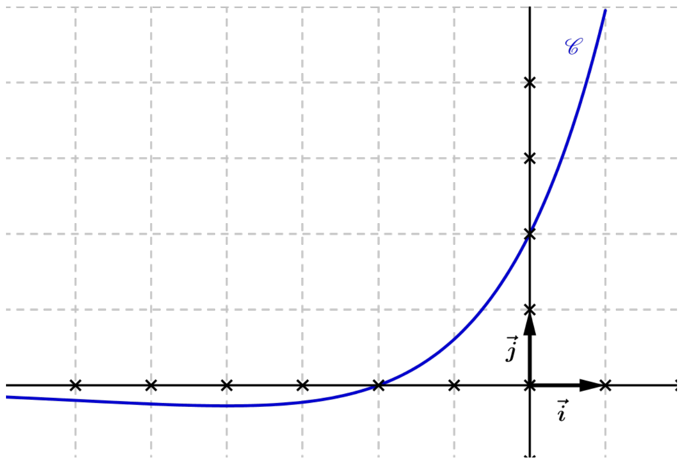
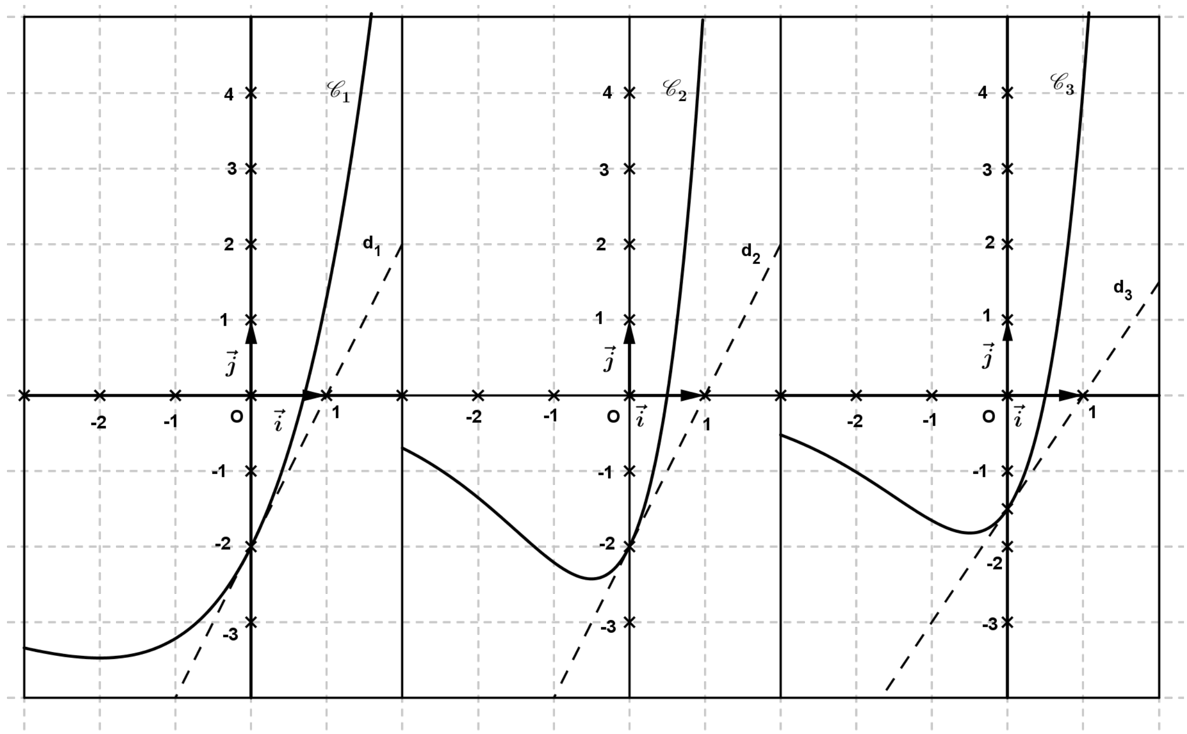
Exercice 1 6 points

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ et trois autres courbes $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$, avec la tangente au point d'abscisse 0.





1 . Donner par lecture graphique, le signe de f(x) selon les valeurs de x.

2 . On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$

a. A l'aide de la courbe $\mathscr{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.

b. L'une des courbes $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F. Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la partie A et la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{2}x}$

1 . L'observation de la courbe $\mathscr{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)=\frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$

b. En déduire une validation de la conjecture précédente.

2 . On pose I = $\int_0^1 f(x)\,dx$.

a. Interpréter géométriquement le réel I.

b. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x$ et $v(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.
Vérifier que $f=2(u'v+uv')$.

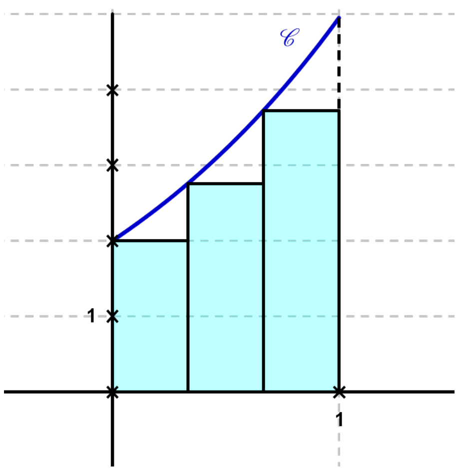
c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

3 . On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels s est un nombre réel
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à n-1 Affecter à s la valeur $s+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ Fin de boucle
Sortie :	Afficher s

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

a. Justifier que s_3 représente l'aire, en unités d'aire, du domaine coloré en bleu sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n de vient grand ?

CORRECTION

Partie A

1 . La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées (-2;0).
Sur]-2; +∞[, la courbe est au dessus de l'axe des abscisses donc f(x) > 0.
Sur]–∞ ; -2[, la courbe est en dessous de l'axe des abscisses donc f(x) < 0.
On donne le résultat sous forme de tableau

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad$ $+\infty$
$f(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

2 . F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x)=f(x)$

a. **P**ar lecture graphique on obtient : f(0) = 2 et f(-2) = 0
donc $F'(0)=2$ et $F'(-2)=0$

b. . d_1 passe par les points de coordonnées $(0;-2)$ et $(1;0)$
Le coefficient directeur de d_1 est : $a_1=\dfrac{0-(-2)}{1-0}=2=F'(0)$
. d_2 passe par les mêmes points donc : $a_1=a_2=2=F'(0)$
. d_3 passe par les points de coordonnées $(0;-1{,}5)$ et $(1;0)$
Le coefficient directeur de d_3 est : $a_3=\dfrac{0-(-1{,}5)}{1-0}=1{,}5\neq F'(0)$
Donc $\mathscr{C}_3$ n'est pas la courbe représentative de F.
La courbe $\mathscr{C}_2$ n'admet pas au point d'abscisse -2, une tangente horizontale $(F'(-2)=0)$
donc la courbe $\mathscr{C}_2$ n'est pas la courbe représentative de F.
Conclusion
$\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de F.

3 .a. $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{2}x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$
On a $(e^u)'=u'e^u$

donc $f'(x)=1\times e^{\frac{1}{2}x}+(x+2)\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\right)=\left(\frac{1}{2}x+2\right)e^{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$

b. Pour tout nombre réel x : $e^{\frac{1}{2}x}>0$, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de x + 4
On donne les variations sous forme de tableau

x	$-\infty$ $\quad -4 \quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$
$f(x)$	↘ $-2e^{-2}$ ↗

Donc f(-4) est le minimum de f sur $\mathbb{R}$
$f(-4)=-2e^{-2}$

2 . $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

a. f est continue et positive sur [0;1] donc I est l'aire en unités d'aire de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisse et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

b. u(x) = x donc u'(x) = 1

v(x) = $e^{\frac{1}{2}x}$ donc v'(x) = $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$

$$2(u'(x)v(x)+u(x)v'(x))=2\left(1\times e^{\frac{1}{2}x}+x\times\frac{1}{2}\times e^{\frac{1}{2}x}\right)=2e^{\frac{1}{2}x}+xe^{\frac{1}{2}x}=(x+2)e^{\frac{1}{2}x}=f(x)$$

donc $2(u'v+uv')=f$

c. on a : $(uv)'=u'v+uv'$

donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est : 2uv

et $I=2u(1)v(1)-2u(0)v(0)=2e^{\frac{1}{2}}-0=2\sqrt{e}$

$$I = 2\sqrt{e}$$

Remarque

$\mathscr{C}_1$ n'est pas la courbe représentative de 2uv (car $2u(0)v(0)=0\neq-2$

Rappel

Deux primitives d'une même fonction sur un même intervalle diffèrent d'une constante.
On peut vérifier que $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de : 2uv – 2.

3 .a. Attention : le repère est orthogonal et non orthonormal.

$n=3$

Première boucle : k = 0

$$s=0+\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)=\frac{1}{3}f(0)$$

s est l'aire, en unités d'aire, du rectangle de base $\frac{1}{3}$ (sur l'axe des abscisses) et de hauteur f(0) = 2.

Deuxième boucle : k = 1

$$s=\frac{1}{3}f(0)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$ est l'aire, en unités d'aire, du rectangle de base : $\frac{1}{3}$ et de hauteur : $f\left(\frac{1}{3}\right)$

Troisième boucle : k = 2

$$s=\frac{1}{3}f(0)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$$

$\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$ est l'aire, en unités d'aire, du rectangle de base : $\frac{1}{3}$ et de hauteur : $f\left(\frac{2}{3}\right)$

Puis on affiche : $s_3=\frac{1}{3}\times f(0)+\frac{1}{3}\times f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\times f\left(\frac{2}{3}\right)$ et s_3 est l'aire, en unités d'aire, du domaine coloré en bleu sur le graphique.

b. Pour n « grand », s_n est l'aire, en unités d'aire,de la somme de n rectangles de base : $\frac{1}{n}$ et de hauteurs : $f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Lorsque n est très grand, le domaine constitué des n rectangles est « très proche » de la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = 0 et x = 1 et la limite de s_n lorsque n tend vers $+\infty$ est I.

Lorsque n est très grand, s_n est une valeur approchée (« assez précise ») de I.