Exercice 2 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.
Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie et justifiera son choix.

Il est attribué un point par réponse correcte et convenablement justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.
Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

La droite $\mathscr{D}$ est définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x=5-2t \\ y=1+3t \\ z=4 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

1 . On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$

a. La droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
b. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
c. La droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

2 . On note $\mathscr{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées $(3;1;1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

a. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.
b. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes.
c. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Pour es questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

3 . Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe vérifiant $|z+i|=|z-i|$

a. $\mathscr{E}$ est l'axe des abscisses .
b. $\mathscr{E}$ est l'axe des ordonnées.
c. $\mathscr{E}$ est le cercle ayant pour centre O et de rayon 1.

4 . On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\frac{c}{b}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

a. Le triangle OBC est isocèle en O.
b. Les points O, B, C sont alignés.
c. Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

CORRECTION

1 . $\boxed{\textbf{Réponse : b}}$ **$\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.**

$\mathscr{D}$ est la droite passant par $A(5;1;4)$ et de vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$

$\mathscr{P}$: $3x+2y+z-6=0$ $\quad \vec{N}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

$\vec{N}$ et $\vec{V}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{D}$ n'est pas perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

$\vec{N}.\vec{V}=-2\times3+3\times2+0\times1=0$

Les vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux donc $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$

$A(5;1;4)$ $\quad 3\times5+2\times1+4-6=15\neq0$ $\quad$ A n'appartient pas à $\mathscr{P}$

donc $\mathscr{D}$ n'est pas incluse dans $\mathscr{P}$.

<u>conclusion</u>

$\mathscr{D}$ est (strictement) parallèle à $\mathscr{P}$.

2 . $\boxed{\textbf{Réponse : b}}$ **$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes.**

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{V}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles ;

On écrit une représentation paramétrique de $\mathscr{D}'$: $\begin{cases}x=3+2t'\\y=1-t'\\z=1+2t'\end{cases}$ $\quad t'\in\mathbb{R}$

On détermine l'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$

$$\begin{cases}5-2t=3+2t'\\1+3t=1-t'\\4=1+2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=\dfrac{3}{2}\\-2t=-2+3\\3t=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=\dfrac{3}{2}\\t=-\dfrac{1}{2}\\t=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes en $K\left(6;-\dfrac{1}{2};4\right)$

3 . $\boxed{\textbf{Réponse : a}}$ **$\mathscr{E}$ est l'axe des abscisses**

<u>Première méthode</u> (méthode géométrique)

M(z) $\quad$ A(i) $\quad$ B(- i)

$\overrightarrow{AM}$ (z – i) $\quad$ $\overrightarrow{BM}$ (z + i)

AM = | z – i | $\quad$ BM = | z + i |

| z – i | = | z + i | $\Leftrightarrow$ AM = BM $\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB].

Or la médiatrice de [AB] est l'axe des abscisses.

<u>Deuxième méthode</u> (méthode analytique)

z = x + iy $\quad$ x $\in\mathbb{R}$ $\quad$ y $\in\mathbb{R}$

z + i = x + (y + 1)i $\quad$ et $\quad$ z – i = x + (y – 1)i

$|z+i|^2=x^2+(y+1)^2=x^2+y^2+2y+1$ $\quad$ $|z-i|^2=x^2+(y-1)^2=x^2+y^2-2y+1$

$|z+i|=|z-i| \Leftrightarrow (|z+i|)^2=(|z-i|)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+2y+1=x^2+y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow 4y=0 \Leftrightarrow y=0$

donc $\mathscr{E}$ est l'axe des abscisses

4 . Réponse : c Le triangle OBC est isocèle rectangle en b.

B(b) avec b nombre complexe non nul.

C(c) avec c nombre complexe non nul.

$\overrightarrow{OB}$ (b) $\overrightarrow{OC}$ (c)

$\left|\frac{c}{b}\right|=\frac{|c|}{|b|}=\frac{OC}{OB}$ et $\left|\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right|=\sqrt{2}$

donc $\frac{OB}{OC}=\sqrt{2}\neq 1$ et le triangle OBC n'est pas isocèle en O.

$\arg(\frac{c}{b}) = (\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}})$ (2π) or $\arg(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{\pi}{4}$ (2π)

donc $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) \neq 0$ (2π) et $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) \neq \pi$ (2π)

Les points O, B et C ne sont pas alignés.

Conclusion

Les deux premières réponses sont fausses donc nécessairement la troisième est vraie.

Justifications non nécessaires

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$$

donc $\frac{c}{b}=1+i$ et $c=(1+i)b$

$\overrightarrow{BC}$ $((1+i)b-b)$ $\overrightarrow{BC}$ (ib)

BC = | ib | = | b | = OB

Le triangle OBC est isocèle en B

OB = BC = | b | $OB^2 = BC^2 = |b|^2$

c = (1+i)b | c| = $\sqrt{2}$ | b | donc $OC^2 = 2|b|^2$

Conséquence

$$OB^2 + BC^2 = OC^2$$

La réciproque du théorème de pythagore nous permet de conclure que le triangle OBC est rectangle en B.

Remarque

on peut aussi utiliser le résultat $\widehat{BOC} = \frac{\pi}{4}$