Exercice 3 5 points

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1 . La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.
On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces de la machine B on un défaut.
On choisit une pièce au hasard et on considère les événements suivants :
. A : « La pièce est produite par la machine A ».
. B : « La pièce est produite par la machine B ».
. D : « La pièce a un défaut ».
. $\bar{D}$ l'événement contraire de l'événement D.

a. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
b. Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.
c. Démontrer que la probabilité P(D) de l'événement D est égale à 0,094.
d. On constate que la pièce choisie à un défaut.
Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

2 . On estime que la machine A est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes.
On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A.On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.
On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces,
et $F_n=\dfrac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
b. Dans cette question on prend n = 150.
Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150} .
c. Un test qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites.
Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.

CORRECTION

1 .a. Nous obtenons de l'énoncé :

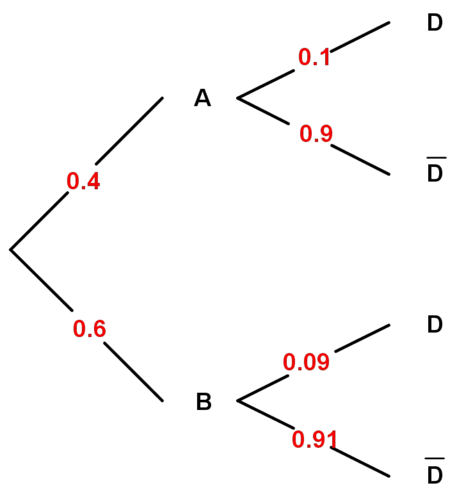
$B=\bar{A}$ $\quad P(A) = 0,4$ $\quad P(B) = 0,6$

$P_A(D)=0,1$ et $P_B(D)=0,09$

On déduit que $P_A(\bar{D})=1-P_A(D)=0,9$

et que $P_B(\bar{D})=1-P_B(D)=0,91$

On construit l'arbre pondéré suivant pour traduire la situation.



b. On nous demande de calculer : $P(A\cap D)$.

En utilisant l'arbre pondéré :

$P(A\cap D)=0,4\times 0,1=0,04$

c. En utilisant l'arbre pondéré ou en utilisant la formule des probabilités totales, on obtient

$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)$

$P(B\cap D)=0,6\times 0,09=0,054$

$\boxed{P(D) = 0,04 + 0,054 = 0,094}$

d. On nous demande de calculer : $P_D(A)$

$$P_D(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(D)}=\frac{0,04}{0,094}=\frac{40}{94}=\frac{20}{47}$$

$$P_D(A) = \frac{20}{47} \simeq 0,426$$

2 .a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

On choisit au hasard une pièce fabriquée par la machine A

Succès : la pièce obtenue est conforme c'est à dire n'a pas de défaut ;

Echec : la pièce obtenue n'est pas conforme c'est à dire a un défaut.

Succès : $\bar{D}$ et Echec : D

P(D) = 0,094 donc $P(\bar{D})=1-0,094=0,906$

La probabilité de succès est p = 0,906.

On effectue n tirages (n entier naturel non nul) successifs que l'on suppose indépendants et avec remise.

X_n est la variable aléatoire égale au nombre de succès en n épreuves.

La loi de probabilité de X_n est donc la loi binomiale de paramètres n et p = 0,906.

b. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour des échantillons de n pièces est :

$$I_n = \left[p-1,96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p+1,96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

avec $n \geqslant 30$; $np \geqslant 5$; $n(1-p) \geqslant 5$

Pour $n = 150 \geqslant 30$ et $p = 0{,}906$

$np = 150 \times 0{,}906 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 150 \times 0{,}094 \geqslant 5$

$$I_{150} = \left[0{,}906 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}906 \times 0{,}094}}{\sqrt{150}} ; 0{,}906 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}906 \times 0{,}094}}{\sqrt{150}}\right]$$

En utilisant la calculette, on obtient :

$$0{,}046 < 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}906 \times 0{,}094}}{\sqrt{150}} < 0{,}047$$

I_{150} =[0,906-0,047 ; 0,906+0,047]

I_{150} = **[0,859 ; 0,953]**

c. Dans l'échantillon de test on a : 150-21 = 129 pièce conformes

et la proportion obtenue est : $f = \dfrac{129}{150} \simeq 0{,}86$

on $0{,}86 \in I_{150}$

Donc au seuil de 95 % on ne remet pas en cause le réglage de la machine.