Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel n, } u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1 .a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 . On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

b. Vérifier que si n est l'un des entiers 1,2,3,4 alors u_n - 1 a le même signe que $(-1)^n$.

c. **E**tablir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n - 1 a le même signe que $(-1)^n$.

2 . Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Etablir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. On admet que tout entier naturel n , $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

1 .a. $u_{n+1}=\frac{u_n+2}{2u_n+1}$ $u_0=2$

- $u_1=\frac{u_0+2}{2u_o+1}=\frac{4}{5}$ = **0,8**
- $u_2=\frac{u_1+2}{2u_1+1}=\frac{\frac{4}{5}+2}{\frac{8}{5}+1}=\frac{14}{13}$ $\simeq 1{,}08$
- $u_3=\frac{u_2+2}{2u_2+1}=\frac{\frac{14}{13}+2}{\frac{28}{13}+1}=\frac{40}{41}$ $\simeq 0{,}98$
- $u_4=\frac{u_3+2}{2u_3+1}=\frac{\frac{40}{41}+2}{\frac{80}{41}+1}=\frac{122}{121}$ $\simeq 1{,}01$

b. n = 0 $u_0 = 2$ u_0 - 1 = 1 > 0 et $(-1)^0 = 1 > 0$
donc (u_0 - 1) et $(-1)^0$ sont de même signe.
- n = 1 u_1 - 1 = - 0,2 < 0 et $(-1)^1$ = - 1 < 0
donc (u_1 - 1) et $(-1)^1$ sont de même signe.
- n = 2 u_2 - 1 $\simeq 0{,}08$ >0 et $(-1)^2 = 1 > 0$
donc (u_2 - 1) et $(-1)^2$ sont de même signe.
- n = 3 u_3 - 1 $\simeq -0{,}02$ < 0 et $(-1)3$ = - 1 < 0
donc (u_3 - 1) et $(-1)^3$ sont de même signe.
- n = 4 u_4 - 1 $\simeq 0{,}01$ > 0 et $(-1)^4 = 1 > 0$
donc (u_4 - 1) et $(-1)^4$ sont de même signe.

c. Pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1}-1=\frac{u_n+2}{2u_n+1}-1=\frac{u_n+2-(2u_n+1)}{2u_n+1}=\frac{-u_n+1}{2u_n+1}$$
<u>conséquence</u>
Pour tout entier naturel n on a u_n > 0 donc $2u_n$ + 1 > 0 et le signe de (u_{n+1} - 1) est le signe de ($-u_n$ + 1) donc le signe opposé de (u_n - 1).

d. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier n, on a : u_n - 1 a le même signe que $(-1)^n$.
<u>Initialisation</u>
(u_0 -1) et $(-1)^0$ ont le même signe.
La propriété est vérifiée pour n = 0.
<u>Hérédité</u>
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : (u_n - 1) a le même signe que $(-1)^n$ et on doit démontrer que : (u_{n+1} - 1) a le même signe que $(-1)^{n+1}$.
Or (u_{n+1} - 1) a le signe opposé de (u_n - 1) donc le signe de : $(-1)\times(u_n-1)$
soit le signe de $(-1)^{n+1}$
<u>Conclusion</u>
le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a (u_n - 1) a le même signe que $(-1)^n$

2 . Pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1}{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1} = \frac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{u_n + 2 + (2u_n + 1)} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$$

b. $v_{n+1} = \dfrac{-(u_n + 1)}{3(u_n + 1)} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} = -\dfrac{1}{3} v_n$

donc (v_n) est la suite géométrique de raison : $-\dfrac{1}{3}$ et de 1^{er} terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{2 - 1}{2 + 1} = \dfrac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

$$v_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

c. On admet que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$

donc $u_n = \dfrac{1 + \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}$

-1 < $-\dfrac{1}{3}$ < 1 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{1} = 1$