Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

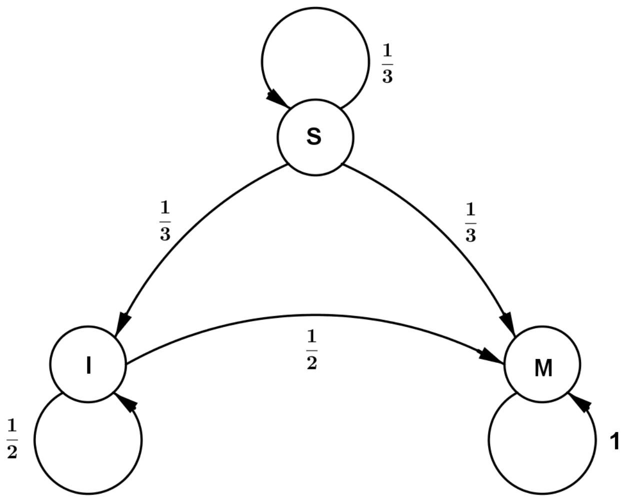
Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition.
Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :
S : « l'individu est sain, c'est à dire non malade et non infecté »
I : « l'individu est porteur sain, c'est à dire non malade mais infecté »
M : « l'individu est malade et infecté »

Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus :

- Parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$
- Parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous



On note $P_n = \begin{pmatrix} s_n & i_n & m_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n, m_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain,malade la $n^{ième}$ semaine.
On a alors $p_0 = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0 & 0{,}01 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n

$$\begin{cases} s_{n+1} = \frac{1}{2}s_n \\ i_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{cases}$$

1 . Ecrire la matrice A appelée *matrice de transition,* telle que pour tout entier naturel n,
$$P_{n+1}=P_n\times A$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n=P_0\times A^n$.

3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines.
On pourra arrondir les valeurs à 10^{-2} ;
Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puis qu'au bout de quatre semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.
L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition ;

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi $Q_n = \begin{pmatrix} S_n & I_n & M_n \end{pmatrix}$ où S_n, I_n, M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain, malade la $n^{\text{ième}}$ après la vaccination.
Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1}=Q_n B$.
D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. pour la suite, on prend $Q_0 = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}10 & 0{,}89 \end{pmatrix}$ où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2} .

1 . Exprimer $S_{n+1}, I_{n+1}, M_{n+1}$ en fonction de S_n, I_n, M_n .

2 . Déterminer la constante réelle k telle que $B^2=k\,J$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.
On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n=B^2$.

3 .a. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b. Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie.
Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

CORRECTION
Dans l'exercice on utilise les matrices lignes

Partie A

1 . On détermine les coefficients de la matrice A de transition.
L'énoncé donne :
$P_S(I)=\frac{1}{3}=a_{12}$ et $P_S(M)=\frac{1}{3}=a_{13}$

donc $P_S(S)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}=a_{11}$

Parmi les individus « porteurs sains », les uns deviennent « malades », les autres restes « porteurs sains ».
Donc $P_I(S)=0=a_{21}$.

L'énoncé donne : $P_I(M)=\frac{1}{2}=a_{23}$ conséquence : $P_I(I)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=a_{22}$.

Les individus « malades » restent « malades ».
Donc $P_M(M)=1=a_{33}$ et $P_M(I)=0=a_{32}$ et $P_M(S)=0=a_{31}$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Remarques
Tous les coefficients sont donnés par le graphe probabiliste.
On peut aussi déterminer ces coefficients en utilisant le produit matriciel $p_{n+1}=p_n\times A$
et les expressions de $s_{n+1}, i_{n+1}, m_{n+1}$ en fonction de s_n, i_n, m_n .

2 . On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n : $p_n=p_0\times A^n$.

Initialisation
pour n = 1
$p_0=\begin{pmatrix}s_0 & u_0 & m_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}99 & 0 & 0{,}01\end{pmatrix}$

$s_1=\frac{1}{3}s_0=0{,}33$

$i_1=\frac{1}{3}\times 0{,}99+\frac{1}{2}\times 0=0{,}33$

$m_1=\frac{1}{3}\times 0{,}99+\frac{1}{2}\times 0+1\times 0{,}01=0{,}34$

$p_1=\begin{pmatrix}0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}34\end{pmatrix}$

En effectuant le calcul matriciel

$$p_0A=\begin{pmatrix}0{,}99 & 0 & 0{,}01\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}34\end{pmatrix}$$

On obtient $p_0A=p_1$
La propriété est vérifiée pour n = 1.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que $p_n = p_o A^n$ et on doit démontrer que $p_{n+1} = p_n A^{n+1}$

Or $p_{n+1} = p_n A = (p_0 A^n) A = p_0 (A^n A) = p_0 A^{n+1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $p_n = p_0 A^n$.

3 . En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}1 & 0{,}89 \\ 0 & 0{,}06 & 0{,}94 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $p_4 = p_0 A^4 = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}1 & 0{,}89 \end{pmatrix}$

La probabilité qu'un individu soit sain au bout de 4 semaines est : s_4

$s_4 = 0{,}01$

Partie B

Remarque :

L'énoncé précise que l'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

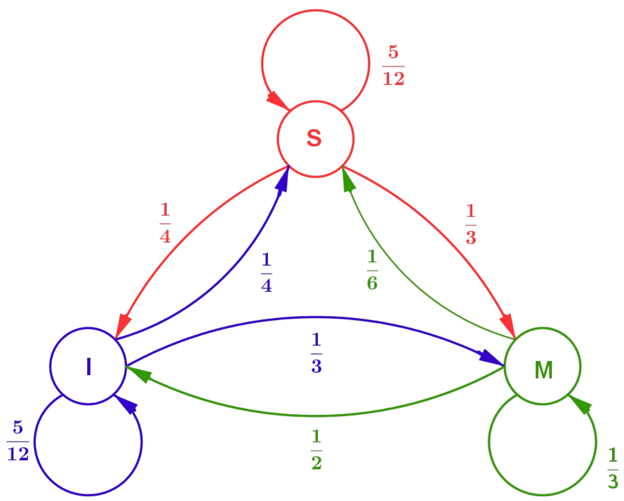
$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

C'est à dire par exemple : $b_{31} = \frac{1}{6} = P_M(S)$ (donc $\frac{1}{6}$ des « malades » deviennent « sains »)

$b_{32} = \frac{1}{2} = P_M(I)$ (donc la moitié des « malades » deviennent « porteurs sains »)

$b_{33} = \frac{1}{3} = P_M(M)$ (donc $\frac{1}{3}$ des « malades » restent « malades »)

On peut aussi donner les résultats sous la forme d'un graphe probabiliste.



1 . Pour tout entier naturel n

$Q_{n+1}=Q_n B$ avec $Q_n=\begin{pmatrix}S_n & I_n & M_n\end{pmatrix}$

$S_n=P(S)$ pour la $n^{\text{ième}}$ semaine après la vaccination.

$Q_0 = P_4 = \begin{pmatrix}0{,}01 & 0{,}10 & 0{,}89\end{pmatrix}$

En effectuant le calcul matriciel $Q_n B$ on obtient :

$$\begin{cases} S_{n+1}=\dfrac{5}{12}S_n+\dfrac{5}{12}I_n+\dfrac{1}{6}M_n \\ I_{n+1}=\dfrac{1}{4}S_n+\dfrac{1}{4}I_n+\dfrac{1}{2}M_n \\ M_{n+1}=\dfrac{1}{4}S_n+\dfrac{1}{2}I_n+\dfrac{1}{3}M_n \end{cases}$$

2 . On note $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

$$B^2=\begin{pmatrix}\frac{5}{12}&\frac{1}{4}&\frac{1}{3}\\ \frac{5}{12}&\frac{1}{4}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{5}{12}&\frac{1}{4}&\frac{1}{3}\\ \frac{5}{12}&\frac{1}{4}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix}$$

En utilisant le calcul matriciel (ou la calculatrice) on obtient :

$$k_{11}=\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}+\frac{1}{4}\times\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{25}{144}+\frac{5}{48}+\frac{1}{18}=\frac{25+15+8}{144}=\frac{48}{144}=\frac{1}{3}$$

On pourrait vérifier que tout les coefficients k_{ij} sont égaux à $\dfrac{1}{3}$.

C'est à dire $B^2=\dfrac{1}{3}J$

En utilisant la calculatrice on peut démontrer que $JB=BJ=J$.

On obtient ce résultat car pour la matrice B toutes les sommes des coefficients d'une ligne ou d'une colonne sont égales à 1.

<u>Conséquence :</u>

$$B^3=B^2\times B=\left(\frac{1}{3}J\right)\times B=\frac{1}{3}(JB)=\frac{1}{3}J=B^2$$

Et on peut démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a : $B^n=B^2=\dfrac{1}{3}J$

3 .a. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on ait : $Q_n=Q_0B^n$

(on peut effectuer une démonstration par récurrence comme dans la partie A)

donc $Q_n=Q_0B^n=Q_0B^2=Q_0\left(\dfrac{1}{3}J\right)=\dfrac{1}{3}(Q_0J)$

$$Q_n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0{,}01 & 0{,}10 & 0{,}89\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

on obtient :

$$Q_n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

b. pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2

$$S_n = I_n = M_n = \frac{1}{3} .$$

donc on ne peut pas éradiquer la maladie grâce au vaccin puisque toutes les semaines $\frac{1}{3}$ des individus sont malades (pas toujours les mêmes).