Exercice 1 4 points

Dans cet exercice, sauf indication contraire,les résultats seront arrondis au centième.

1 . La durée de vie,exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
On sait que $P(X\leqslant 2)=0,15$.
Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ .

2 . a . Déterminer $P(X\geqslant 3)$.

b . Montrer que pour tous réels positifs t et h , $P_{X\geqslant t}(X\geqslant t+h)=P(X\geqslant h)$.

c . Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

d . Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

3 . Dans suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3}
L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.
Le résultat de ce test remet-il en questio l'annonce de l'entreprise A ? Justifier.
On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

Correction :

1. X suit la loi exponentielle de paramètre λ donc la fonction de densité de probabilité sur $[0;+\infty[$ est définie par : $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ $t\in[0;+\infty[$.

La fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(t)=-e^{-\lambda t}$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

On a donc $P(X\leqslant 2)=\int_0^2 f(t)\,dt=F(2)-F(0)=-e^{-2\lambda}+e^0=1-e^{-2\lambda}$

$P(X\leqslant 2)=0,15$
$\Leftrightarrow$ $1-e^{-2\lambda}=0,15$
$\Leftrightarrow$ $e^{-2\lambda}=1-0,15=0,85$
$\Leftrightarrow$ $-2\lambda=\ln 0,85$
$\Leftrightarrow$ $\boxed{\lambda=\dfrac{-\ln 0,85}{2}}$

La calculatrice donne pour valeur approchée au millième de λ : **0,081**
$f(t)=0,081\,e^{-0,081\,t}$ $t\in[0;+\infty[$

2 . a . $P(X\geqslant 3)=1-P(X<3)=1-\int_0^3 f(t)\,dt=1-(-e^{-0,081\times 3}+1)=e^{-0,243}$

$P(X\geqslant 3)=e^{-0,243}\simeq$ **0,78** (arrondi au centième)

Remarque :
Pour tout nombre réel positif ou nul on a $P(X\geqslant T)=e^{-0,081\,T}$

b . Pour tous t et h nombres réels positifs on a :

$$P_{X\geqslant t}(X\geq t+h)=\frac{P[(X\geqslant t)\cap(X\geqslant t+h)]}{P(X\geqslant t)}=\frac{P(X\geqslant t+h)}{p(X\geqslant t)}=\frac{e^{-0,081(t+h)}}{e^{-0,081t}}$$

$$P_{X\geqslant t}(X\geq t+h)=\frac{e^{-0,081t}\times e^{-0,081h}}{e^{-0,081t}}=e^{-0,081h}=P(X\geq h)$$

Donc, pour tous réels positifs t et h , **$P_{X\geqslant t}(X\geqslant t+h)=P(X\geqslant h)$**

c . On nous demande de calculer :

$P_{X\geqslant 3}(X\geq 3+2)=P(X\geq 2)=1-P(X<2)$ =**0,85**

d . L'espérance mathématique de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$.

Pour l'exemple : $E=\dfrac{1}{0,081}\simeq$ =**12,35**

La durée de vie moyenne d'un moteur est 12 ans.

3 . La proportion de moteurs défectueux dans le prélèvement est : $\frac{15}{800} \simeq 0{,}019$

On suppose que le nombre de moteurs fabriqués est très important et que l'on puisse considérer le prélèvement de 800 moteurs comme 800 prélèvements de un moteur avec remise. La proportion de moteurs défectueux annoncée par l'entreprise est: $p=0{,}01$.

$n=800 \geqslant 30$ et $np=8 \geqslant 5$ et $n(1-p)=8 \times 99 \geqslant 5$

On détermine **l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %**.

$$I=[0{,}01-1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}01\, x\, 0{,}99}{800}}\,;0{,}01+1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}01\, x\, 0{,}99}{800}}]$$

On obtient en utilisant la calculatrice : $0{,}006 < 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}01\, x\, 0{,}99}{800}} < 0{,}007$

I=[0,003;0,017]

Or $0{,}19$ **n'appartient pas** à l'intervalle **I**

Au seuil des 95 %, ce test contredit l'annonce de l'entreprise A.