Exercice 2 — 4 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1 . Proposition 1

Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$

2 . g est la fonction définie sur $\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$ par $g(x)=2x\ln(2x+1)$

Proposition 2

Sur $\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$, l'équation $g(x)=2x$ a une solution unique : $\frac{e-1}{2}$

Proposition 3

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est : $1+\ln 4$.

3 . L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\vec{O};\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont les plans d'équations respectives : $2x+3y-z-11=0$ et $x+y+5z-11=0$

Proposition 4

Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement..

Correction :

1 . Proposition 1 : proposition fausse

Contre-Exemple :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n=3-\frac{1}{n}$

Pour tout entier naturel non nul n :

$u_{n+1}-u_n=3-\frac{1}{n+1}-3+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}>0$

La suite est **strictement croissante**.

Pour tout entier naturel non nul : $u_n>0$ (car $\frac{1}{n}\leqslant 1$).

La suite est **positive**.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=3$

La proposition 1 est fausse.

Remarque : par contre, nous avons le théorème : « **Toute suite croissante et majorée est convergente** ».

2 . Proposition 2 : proposition fausse

$g(x)=2x$
$\Leftrightarrow 2x\ln(2x+1)=2x$
$\Leftrightarrow 2x[\ln(2x+1)-1]=0$
$\Leftrightarrow (2x=0 \quad \text{ou} \quad \ln(2x+1)-1)=0$

donc **0 est solution de l'équation**.

Donc, l'équation $g(x)=2x$ **n'a pas une solution unique** : $\frac{e-1}{2}$

La proposition 2 est fausse.

Remarque : si on termine la résolution de l'équation on obtient : $S=\{0;\frac{e-1}{2}\}$.

Proposition 3 : proposition vraie

g est dérivable sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $g'(\frac{1}{2})$.

$g(x)=2x\ln(2x+1)$

On a $(\ln u(x))'=\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)>0$

On dérive un produit

$g'(x)=2.\ln(2x+1)+2x.\frac{2}{2x+1}=2\ln(2x+1)+\frac{4x}{2x+1}$

$g'(\frac{1}{2})=2\ln(1+1)+\frac{2}{1+1}=2\ln(2)+1=\ln(2^2)+1=\ln(4)+1$ **La proposition 3 est vraie.**

3 . Proposition 4 : proposition vraie

$\mathscr{P}:\quad :2x+3y-z-11=0$

$\vec{N}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ est **un vecteur normal** à $\mathscr{P}$.

$\mathscr{R}:\quad :x+y+5z-11=0$

$\vec{L}\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ est **un vecteur normal** à $\mathscr{R}$..

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement si et seulement si les vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{L}$ sont orthogonaux.
$\vec{N}.\vec{L}=2\times1+3\times1+(-1)\times5=0$

La proposition 4 est vraie.