Exercice 3 **Candidats n'ayant pas suivi l'enseigne ment de spécialité** 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{u}$; $\vec{v}$).

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n définie par : $z_0=1$ et $z_{n+1}=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n$.

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

1 . Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$

2 . a . Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b . En déduire l'expression de r_n en fonction de n .

c . Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3 . On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que R>P n prend la valeur $n+1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

a . Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour P=0,5 ?

b . Pour P= 0,01 on obtient $n=33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

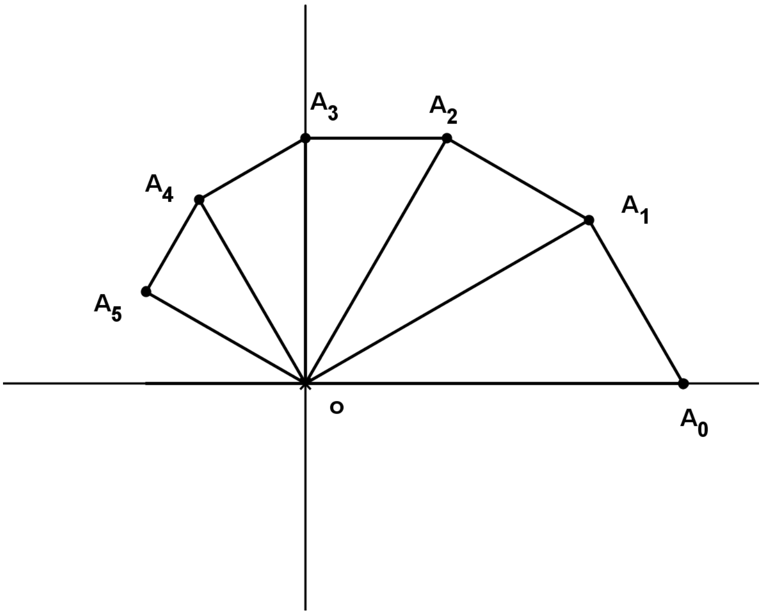
2 . a . Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}

b . On admet que $z_n=r_n\ e^{i\frac{n\pi}{6}}$
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c . Compléter la figure donnée en annexe,à rendre avec la copie,en représentant les points A_6 , A_7 , A_8 et A_9.
Les traits de construction seront apparents.

ANNEXE EXERCICE 3

A compléter et à rendre avec la copie



Correction :

1 . $\left|\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right|^2=\frac{9}{16}+\frac{3}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

$\left|\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{2}$ donc $\theta=\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

$\boxed{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}$

2 . a . Pour tout entier naturel n

$r_{n+1}=|z_{n+1}|=\left|(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4})z_n\right|=\left|\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right|\times|z_n|$

$r_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n$

La suite (r_n) est **une suite géométrique** de raison: $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b . $r_0=|z_0|=\underline{1}$

Pour tout entier naturel n :

$r_n=r_0\,q^n$

$r_n=1.\ (\frac{\sqrt{3}}{2})^n$

$\boxed{r_n=(\frac{\sqrt{3}}{2})^n}$

c . $\overrightarrow{OA_n}(z_n)$

$OA_n=r_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$0<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} r_n=0$

$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{OA}_n=\underline{0}$

3 . a . $1>0{,}5$

première étape :

n prend la valeur 1

R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} > 0{,}5$

deuxième étape :

n prend la valeur 2

R prend la valeur $\frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\frac{3}{4} > 0{,}5$

troisième étape :

n prend la valeur 3

R prend la valeur $\frac{3\sqrt{3}}{8} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$\frac{3\sqrt{3}}{8} > 0{,}5$

quatrième étape :

n prend la valeur 4

R prend la valeur $\frac{9}{16} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$

$\frac{9}{16} > 0{,}5$

cinquième étape :

n prend la valeur 5

R prend la valeur $\frac{9\sqrt{3}}{32} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$

$\frac{9\sqrt{3}}{32} < 0{,}5$

La valeur affichée est 5 (n=5).

b . L'algorithme affiche le plus petit entier naturel n tel que : $r_n \leqslant P$.

4 . a . On considère le triangle OA_nA_{n+1}

$\overrightarrow{OA_n}(z_n) \qquad OA_n = r_n$

$\overrightarrow{OA_{n+1}}(z_{n+1}) \qquad OA_{n+1} = r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n$

$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}(z_{n+1} - z_n)$

$$z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n - z_n = \left(\frac{-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n$$

$$\left|\frac{-1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right|^2=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

$$\left|\frac{-1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right|=\frac{1}{2}$$

$$|z_{n+1}-z_n|=\frac{1}{2}|z_n|=\frac{1}{2}r_n$$

$$OA_{n+1}^2+A_nA_{n+1}^2=\frac{3}{4}r_n{}^2+\frac{1}{4}r_n{}^2=r_n{}^2=OA_n{}^2$$

Donc le triangle OA_nA_{n+1} **est rectangle en** A_{n+1} **.**

b . $z_n=r_n\ e^{i\frac{n\pi}{6}}$

A_n appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si

$$\left(\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}(2\pi)\quad \text{ou}\quad \frac{n\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}(2\pi)\right)$$

soit **$n=3+12k$; $k\in\mathbb{N}$ ou $n=9+12k'$; $k'\in\mathbb{N}$**.

On peut remarquer que l'on obtient : $n=3+6K$; $K\in\mathbb{N}$

c . On remarque: $(\overrightarrow{OA_n}\,;\overrightarrow{OA_{n+1}})=\frac{\pi}{6}(2\pi)$

car $arg\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)=\frac{\pi}{6}(2\pi)$

donc le triangle OA_nA_{n+1} est « **un demi triangle équilatéral** »

$A_0(1)$

Pour construire A_1, on construit le point A'_0 soit **un triangle équilatéral**, puis on construit A_1 qui est **le milieu** de $[A_0A'_0]$ et on réitère ces constructions.

(sur le dessin on n'a pas laissé les traits de construction des milieux.)

Il y a d'autres constructions possibles en particulier en construisant des triangles rectangles.