Exercice 3 — Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé.
e'Trois marques X , Y et Z se partage le marché. Soit n un entier naturel.

On note : X_n l'événement « la marque X est utilisée le mois n »,
Y_n l'événement « la marque Y est utilisée le mois n »,
Z_n l'événement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des événements X_n , Y_n ,Z_n sont notées respectivement x_n ,y_n ,z_n .

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.
Un acheteur de la marque X le mois n , a le mois suivant :
50 % de chance de rester fidèle à cette marque,
40 % de chance d'acheter la marque Y,
10 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n , a le mois suivant :
30 % de chance de rester fidèle à cette marque,
50 % de chance d'acheter la marque X,
20 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n , a le mois suivant :
70 % de chance de rester fidèle à cette marque,
10 % de chance d'acheter la marque X,
20 % de chance d'acheter la marque Y.

1 . a . Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n , z_n.
On admet que :
$y_{n+1}=0{,}4x_n+0{,}3y_n+0{,}2z_n$ et que $z_{n+1}=0{,}1x_n+0{,}2y_n+0{,}7z_n$.

b . Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n .En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2 . On définit la suite (U_n) par $U_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n .

On admet que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1}=A\times U_n+B$ où $A=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014: $n=0$, on estime que $U_0=\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et i des entiers naturels. A, B et U des matrices
Entée et initialisation	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$
Traitement	Tant que i< n U prend la valeur $A \times U + B$ i prend la valeur i + 1 Fin de Tant que
Sortie	Afficher U

a . Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n=1$ puis pour $n=3$.

b . Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?

Dans la suite de l'exercice,on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n .

On note **I** la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice **I**–A.

3 . On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

a . Démontrer que $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

b . On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$

En déduire que C= $\begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$

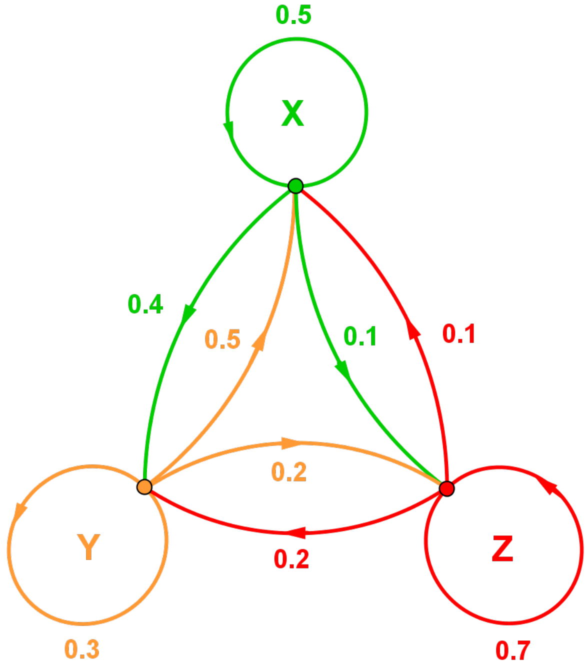
4 . On note V_n la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n .

a . Montrer que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = A \times V_n$.

b . On admet que $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.
Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X,Y et Z au mois de mai ?

Correction :

On peut traduire l'énoncé en construisant l'arbre probabiliste suivant.



1 . a . Pour tout entier naturel n :

$\boxed{x_{n+1}=0,5\,x_n+0,5\,y_n+0,1\,z_n}$

de même $\boxed{y_{n+1}=0,4\,x_n+0,3\,y_n+0,2\,z_n}$ et $\boxed{z_{n+1}=0,1\,x_n+0,2\,y_n+0,7\,z_n}$

b . Pour tout entier naturel n , on a : $x_n + y_n + z_n = \underline{1}$

donc $\boxed{z_n=1-x_n-y_n}$

$x_{n+1}=0,5\,x_n+0,5\,y_n+0,1(1-x_n-y_n)$

$\boxed{x_{n+1}=0,4\,x_n+0,4\,y_n+0,1}$

$y_{n+1}=0,4\,x_n+0,3\,y_n+0,2.(1-x_n-z_n)$

$\boxed{y_{n+1}=0,2\,x_n+0,1\,y_n+0,2}$

2 . a . En utilisant la notation matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

En utilisant les notations de l'énoncé :

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_{n+1} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0,4 & 0+4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$U_{n+1} = AU_n + B$

Au mois de janvier 2014 (pour $n = 0$)

$U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4\,x\,0{,}5 + 0{,}4\,x\,0{,}3 + 0{,}1 \\ 0{,}2\,x\,0{,}5 + 0{,}1\,x\,0{,}3 + 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 + 0{,}12 + 0{,}1 \\ 0{,}1 + 0{,}03 + 0{,}2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}33 \end{pmatrix}}$$

février 2014 : $U_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}33 \end{pmatrix}$

(On peut utiliser la calculatrice)

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4\,x\,0{,}42 + 0{,}4\,x\,0{,}33 + 0{,}1 \\ 0{,}2\,x\,0{,}42 + 0{,}1\,x\,0{,}33 + 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}168 + 0{,}132 + 0{,}1 \\ 0{,}084 + 0{,}033 + 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}317 \end{pmatrix}$$

marrs 2015 : $U_2 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}317 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}317 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4\,x\,0{,}4 + 0{,}4\,x\,0{,}317 + 0{,}1 \\ 0{,}2\,x\,0{,}4 + 0{,}1\,x\,0{,}317 + 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}16 + 0{,}1268 + 0{,}1 \\ 0{,}08 + 0{,}0317 + 0{,}2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}3868 \\ 0{,}3117 \end{pmatrix}}$$

avril 2014 : $\boxed{U_3} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}3868 \\ 0{,}3117 \end{pmatrix}}$

b . x_3 est la probabilité d'utiliser la marque **X** au mois d'avril

$x_3 = 0{,}3868$ (38,68%)

3 . $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $N = I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

a . C est une matrice colonne à deux lignes.

$C = A \times C + B$

$\Leftrightarrow \quad C - A \times C = B$

$\Leftrightarrow \quad I \times C - A \times C = B$

$\Leftrightarrow \quad (I - A) \times C = B$

$\Leftrightarrow \quad N \times C = B$

b . On admet que : $N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$

$N \times C = B$
$\Leftrightarrow \quad N^{-1} \times (N \times C) = N^{-1} \times B$
$\Leftrightarrow \quad I \times C = N^{-1} \times B$
$\Leftrightarrow \quad C = N^{-1} \times B$

donc $C = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4,5+4}{23} \\ \frac{1+6}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8,5}{23} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}}$

4 . a . $V_{n+1} = U_{n*1} - C$
$V_{n+1} = A \times U_n + B - C$
Or, on a $C = A \times C + B$
Donc, $V_{n+1} = A \times U_n + B - A \times C - B$
$V_{n+1} = A \times (U_n - C) = A \times V_n$

b . $U_4 = A^4 \times (U_0 - C) + C$ (pour le mois de mai)

On a A^4 à l'aide de la calculatrice

$A^4 = \begin{pmatrix} 0,0776 & 0,066 \\ 0,033 & 0,0281 \end{pmatrix}$ $\qquad U_0 - C = \begin{pmatrix} 0,13049 \\ -0,00435 \end{pmatrix}$ $\qquad U_4 = \begin{pmatrix} 0,3794 \\ 0,30853 \end{pmatrix}$

Pour le mois de mai : $U_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$

x_4 = **0,3794** (**37,94%**)

y_4 = **0,3085** (**30,85%**)

z_4 = **1 – 0,3794 – 0,3085 = 0,3121** (**31,21%**)