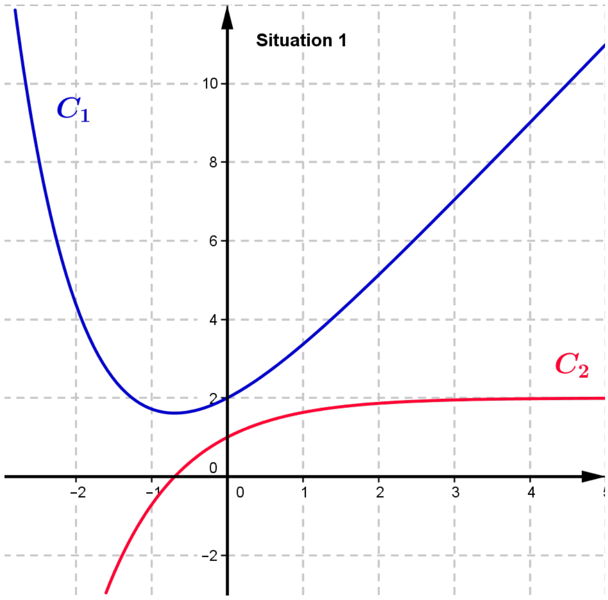
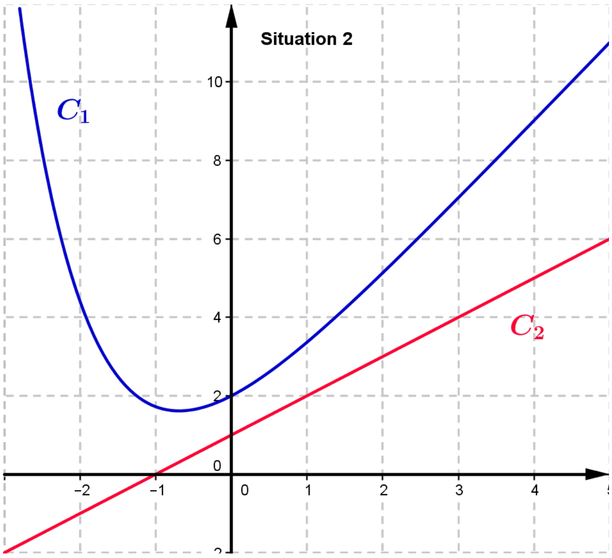
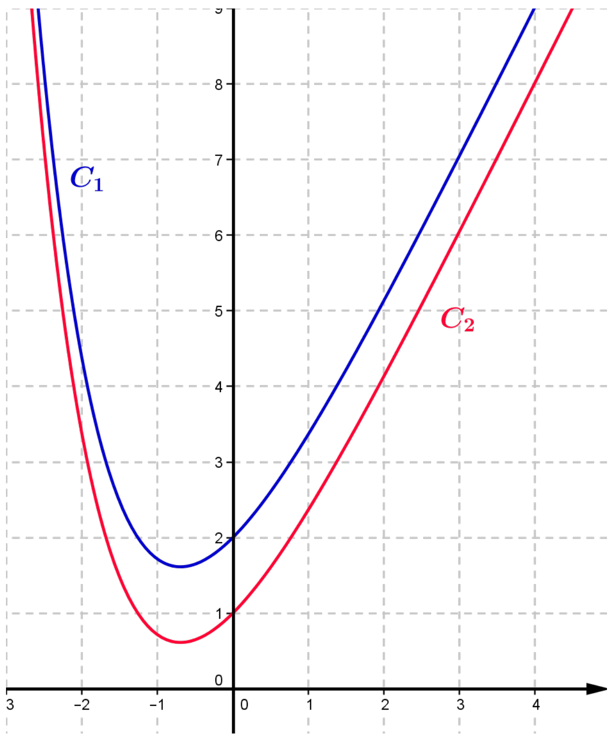
Exercice 4 — 7 points

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; f' est la fonction dérivée de f . Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme C_1 la courbe représentative de la fonction f et C_2 la courbe représentative de f' .
Le point A de coordonnées (0;2) appartient à la courbe C_1 .
Le point B de coordonnées (0;1) appartient à la courbe C_2 .

1 . Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative C_1 de la fonction f . Sur l'une d'entre elles la courbe C_2 de la fonction f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué .







2 . Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe C_1 en A.

3 . On sait que pour tout réel x , $f(x)=e^{-x}+ax+b$ où a et b sont deux nombres réels.

a . Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

b . Prouver que $a=2$.

4 . Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

5 . Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $g(x)=f(x)-(x+2)$.

1 . a . Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

b . En déduire la position de la courbe C_1 par rapport à la droite Δ.

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe C_1 et de la droite Δ, comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.

Figure 2

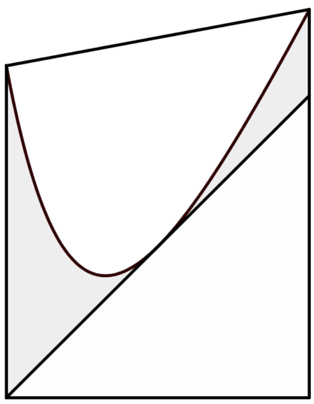
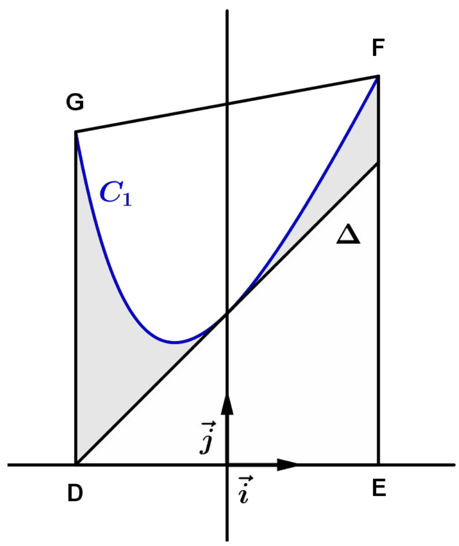


Figure 3



Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :
- D est le point de coordonnées (-2;0),
- E est le point de coordonnées (2;0),
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe C_1 ,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe C_1 .

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe C_1, la droite d'équation $x=-2$ et la droite d'équation $x=2$.

2 . Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

Correction :

PARTIE A

1 . On remarque que C_1 est la courbe représentative d'une fonction qui est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$ avec $-1<\alpha<-0,5$.

Pour **la situation 3**, la courbe C_2 est la courbe d'une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc cette fonction **ne peut être la fonction dérivée** de f .

Pour **la situation 2**, la courbe C_2 est la courbe représentative d'une fonction négative sur $]-\infty;-1[$ et positive sur $]-1;+\infty[$ or $-1<\alpha$ donc cette fonction **ne peut être la fonction dérivée** de f.

Pour **la situation 1**, la courbe C_2 est la courbe représentative d'une fonction qui **peut être la fonction dérivée** de f.

L'énoncé précise que l'une des trois situations est la situation demandée donc **la situation 1 est la situation demandée**.

2 . A(0 ; 2). Une équation de Δ est : $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

Or $f'(0)=f_2(0)=$ **1** car la courbe représentative de f_2 passe par B(0 ; 1)

et $f_1(0)=f_2(0)=$ **2** car la courbe représentative de f_2 passe par A(0 ; 2)

Δ : **$y-2=2(x-0)$ soit $y=x+2$**

3 . a . $f(0)=2$

$f(0)=e^0+b=1+b=2$

$b=$ **1**

b . $f'(x)=-e^{-x}+a$

$f'(0)=-e^0+a=-1+a$

or $f'(0)=f_2(0)=1$ et a 1 + 1 donc

$a=$ **2**

Conclusion

pour tout nombre réel x on a, $f(x)=e^{-x}+2x+1$

4 . Pour tout nombre réel x

$f'(x)=-e^{-x}+2$

$f'(x)\geqslant 0$

$\Leftrightarrow\ -e^{-x}+2\geq 0$

$\Leftrightarrow\ 2\geqslant e^{-x}$

$\Leftrightarrow\ \ln 2\geqslant -x$

$\Leftrightarrow\ -\ln 2\leqslant x$

On démontre de même que $f'(x)\leqslant 0\ \Leftrightarrow\ -\ln 2\geqslant x$

On donne **les variations** de f en utilisant un tableau

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(-\ln 2)$	↗	

Remarque : $-\ln 2 \simeq -0{,}69$ et $\alpha = -\ln 2$

5 . Pour tout nombre réel x on a, $f(x) = e^{-x} + 2x + 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \underline{+\infty}$

PARTIE B

1 . a . $g(x) = f(x) - (x+2)$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x) = f'(x) - 1 = -e^{-x} + 2 - 1 = -e^{-x} + 1$

$g'(x) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow -e^{-x} + 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow 1 \geqslant e^{-x}$
$\Leftrightarrow \ln 1 \geqslant -x$
$\Leftrightarrow 0 \geqslant -x$
$\Leftrightarrow x \geqslant 0$

De même $g'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$.
Donc $g(x)$ admet **un minimum** pour $x = \underline{0}$ et $g(0) = e^{0} + 1 - 2 = \underline{0}$

b . Conséquence
pour tout réel x : $\{g(x) \geqslant g(0) = 0\} \Leftrightarrow \{f(x) - (x+2) \geqslant 0\} \Leftrightarrow \{f(x) \geqslant x+2\}$

Δ est **la courbe représentative** de la fonction qui à x associe $x+2$
Donc, la courbe la courbe représentative de la fonction f est **au-dessus** de Δ sur $\mathbb{R}$.

2 . L'aire en unités d'aire de la partie colorée en gris est :

$$\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = \int_{-2}^{2} (e^{-x} + 2x + 1 - x - 2)\,dx = \int_{-2}^{2} (e^{-x} + x - 1)\,dx$$

$g(x) = e^{-x} + x + 1$

$G(x) = -e^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - x$

G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

et $\int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}\,x$ =G(2)–G(-2)= $-\mathrm{e}^{-2}+\dfrac{4}{2}$ -2-(- $\mathrm{e}^{2}+\dfrac{4}{2}$)

$\int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{e}^{2}$ -4 $-\mathrm{e}^{-2}$

La valeur exacte de la partie du logo colorée en gris est : $\mathrm{e}^{2}-4-e^{-2}$ U.A.

En utilisant la calculatrice on obtient : $\boxed{e^{2}-4-e^{-2}\simeq 3{,}25\ U.A.}$