Exercice 1 5 points

Les parties A et B sont indépendantes. Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production. Les huîtres sont dites de calibre n°3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g. Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n°3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1 . Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huîtres ont la même chance d'être choisies.
On considère les événements suivants :

- J :« l'huître prélevée est une huître japonaise ».
- C :« l'huître prélevée est de calibre n°3 ».

a. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n°3.

c. Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n°3 est 0,695.

d. Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n°3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

2 . La masse d'une huître peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart type $\sigma = 2$.

a. Donner la probabilité que l'huître prélevée dans la production de l'ostréiculteur ait une masse comprise entre 87 g et 89 g.

b. Donner $P(X \geqslant 91)$.

Partie B

Cet ostréiculteur affirme que 60 % de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g. Un restaurateur souhaiterait lui acheter une grande quantité d'huîtres mais il voudrait, auparavant, vérifier l'affirmation de l'ostréiculteur.

Le restaurateur achète auprès de cet ostréiculteur 10 douzaines d'huîtres qu'on considéra comme un échantillon de 120 huîtres tirées au hasard. Sa production est suffisamment importante pour qu'on l'assimile à un tirage avec remise. Il constate que 65 de ces huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

1 . Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 120 huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g. Après en avoir vérifié les conditions d'application, donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable F.

2 . Que peut penser le restaurateur de l'affirmation de l'ostréiculteur ?

Correction :
Partie A

1 .a. L'énoncé précise :

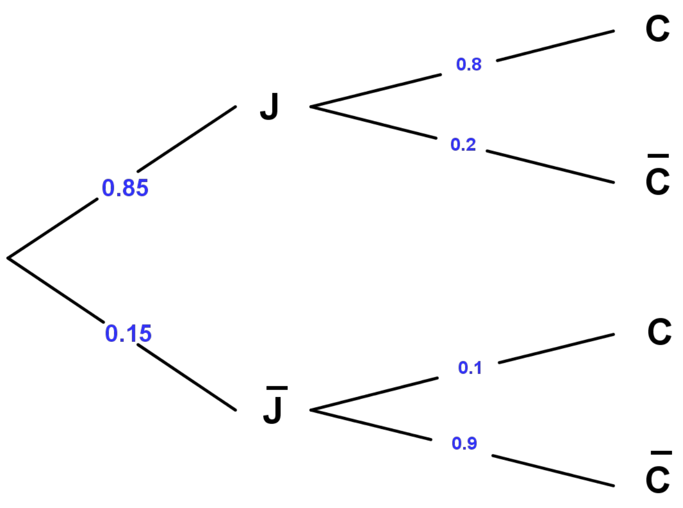
. J est l'événement : « l'huître prélevée est japonaise »
$\bar{J}$ est l'événement : « l'huître prélevée est plate »
C est l'événement: « l'huître prélevée est de calibre n°3 »
$\bar{C}$ est l'événement : « l'huître prélevée n'est pas de calibre n°3 »

. les huîtres plates représentent 15 % de la production de l'ostréiculteur donc $P(\bar{J})=0,15$ et $P(\bar{J})=1–0,15=$**0,85**.

. Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n°3, donc $P_{\bar{J}}(C)=0,1$ et $P_{\bar{J}}(\bar{C})=1–0,1=$**0,9**.

. 80 % des huîtres japonaises sont de calibre n°3, donc $P_J(C)=0,8$ et $P_J(\bar{C})=1-0,8=$**0,2**.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



b. On nous demande de calculer : $P(\bar{J}\cap C)$
$P(\bar{J}\cap C)=P(\bar{J})\times P_{\bar{J}}(C)=0,15\times 0,1=$**0,015**

c. En utilisant**l'arbre pondéré** ou **la formule des probabilités totales**
$P(C)=P(J\cap C)+P(\bar{J}\cap C)$
$P(C)=0,85\times 0,8+0,015=0,680+0,015=0,695=$**0,695**

d. On nous demande de calculer $P_C(\bar{J})$

$$P_C(\bar{J})=\frac{P(C\cap\bar{J})}{P(C)}=\frac{0,015}{0,695}=\frac{15}{695}=\frac{3}{139}$$

$P_C(\bar{J}) \simeq$ **0,0216**

2 .a. La calculatrice donne :
$P(87\leqslant X\leqslant 89)=$**0,2417**

b. La calculatrice donne :
$P(X\geqslant 91)=$**0,3085**

Partie B

1 . L'échantillon contient 120 huîtres donc $n=120\geqslant 30$. L'ostréiculteur affirme que 60 % de ses huîtres ont une masse supérieure à 91g donc $p=0{,}6$.
On a $pn = 120\times 0{,}6 = 72\geqslant 5$ et $(1-p)n = 0{,}4\times 120 = 48\geqslant 5$.
On peut déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F.

$$\boxed{I=\left[p-1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]}$$

soit, $I=\left[0{,}6-1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4}}{\sqrt{120}};0{,}6+1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4}}{\sqrt{120}}\right]$

$0{,}0876< 1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4}}{\sqrt{120}}<0{,}0877$

donc, $\boxed{[0{,}5124;0{,}6876]\subset \mathrm{I}\subset[0{,}5123;0{,}6877]}$

2 . La proportion d'huîtres ayant une masse supérieure à 91g dans l'échantillon est : $f=\frac{65}{120}\simeq 0{,}5417$

$f\in[0{,}5124 ; 0{,}6876]\subset \mathrm{I}$

Donc au seuil de 95 %, le restaurateur ne peut pas rejeter l'affirmation de l'ostréiculteur.