Exercice 2 6 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x)=x+1+\frac{x}{e^x}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\ )$.

Partie A

1 . Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-x+e^x$. Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues). En déduire le signe de $g(x)$.

2 . Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3 . On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$ Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x)=e^{-x}g(x)$.

4 . En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$

5 . Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$ Démontrer que $-1<\alpha<0$.

6 .a. Démontrer que la droite T d'équation $y=2x+1$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

Partie B

1 . Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $H(x)=(-x-1)e^{-x}$.
Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x)=xe^{-x}$.

2 . On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.
Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

Correction :

Partie A

1 . $x \in \mathbb{R}$, $g(x)=1-x+e^{x}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x)=-1+e^{x}$

$g'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow -1+e^{x}\geqslant 0 \Leftrightarrow e^{x}\geqslant 1=e^{0} \Leftrightarrow x\geqslant 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

$g(0)=1+1=2$

$f(x)=0$ admet **un minimum absolu en 0 qui est égal à 2** donc pour tout nombre réel x :

$g(x)\geqslant 2>0$ et g est **strictement positive sur $\mathbb{R}$.**

2 . $f(x)=x+1+\dfrac{x}{e^{x}}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=\underline{0}$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=\underline{+\infty}$

Conséquence

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\underline{+\infty}$

- Remarque : $f(x)=x+1+x\,e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{-x}=\underline{-\infty}$

D'autre part : $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=\underline{-\infty}$

Conséquence :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\underline{-\infty}$

3 . Pour tout nombre réel x , $f(x)=x+1+x\,e^{-x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$(e^{-x})'=-e^{-x}$

$$f'(x)=1+e^{-x}-x\,e^{-x}=e^{-x}\left(\frac{1}{e^{-x}}+1-x\right)=e^{-x}(e^{x}+1-x)$$

$\boxed{f'(x)=e^{-x}g(x)}$

4 . Pour tout nombre réel x : $e^{-x}>0$ et $g(x)>0$ donc $f'(x)>0$

Tableau de variation :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

5 . f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, **le théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent $\alpha\in\mathbb{R}$ par f c'est à dire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α.
Or, $f(-1)=0-e<0$ et $f(0)=1>0$
$f(-1)<f(\alpha)<f(0)$
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $-1<\alpha<0$

6 .a. $f(0)=1$ et $f'(0)=g(0)=2$
L'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est : $y-1=2(x-0)$
T : $\boxed{y=2x+1}$

b. $f(x)=x+1+\frac{x}{e^x}=x+1+x\,e^{-x}$
$d(x)=f(x)-2x-1=x+1+xe^{-x}-2x-1=-x+xe^{-x}=x(e^{-x}-1)$
$e^{-x}\geqslant 1 \Leftrightarrow e^{-x}\geqslant e^0 \Leftrightarrow -x\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 0$

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$e^{-x}-1$	$+$ 0 $-$
x	$-$ 0 $+$
$d(x)$	$-$ 0 -

M(x; $f(x)$) $\in\mathscr{C}$ $\qquad$ H(x;$2x$+1) $\in$T
$\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}0\\ f(x)-2x-1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}0\\ d(x)\end{pmatrix}$
Pour tout nombre réel non nul x, on a d(x) $\leqslant$ 0 donc T **est au dessus** de $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{R}$

Partie B

1 . Pour tout nombre réel x : $H(x)=(-x-1)e^{-x}$
H est dérivable sur $\mathbb{R}$
$H'(x)=(-1)\times e^{-x}+(-x-1)\times(-e^{-x})=x\,e^{-x}=h(x)$

Donc, H est **une primitive** de h sur $\mathbb{R}$ avec $h(x)=x\,e^{-x}$.

2 . $\mathscr{C}$ est en dessous de T sur [1;3] donc l'aire, en unités d'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$ est égale à : $\mathscr{A}=\int_1^3(2x+1-f(x))\,dx=\int_1^3(x-x\,e^{-x})\,dx$

Une **primitive** sur $\mathbb{R}$ de la fonction l définie par : $l(x)=x-x\,e^{-x}$ est L définie par :

$\mathrm{L}(x)=\frac{x^2}{2}-\mathrm{H}(x)=\frac{x^2}{2}-(-x-1)\mathrm{e}^{-x}=\frac{x^2}{2}+(x+1)\mathrm{e}^{-x}$

$\mathscr{A}=\mathrm{L}(3)-\mathrm{L}(1)=\frac{9}{2}+4\mathrm{e}^{-3}-\frac{1}{2}-2\mathrm{e}^{-1}$

$\mathscr{A}=4+4\mathrm{e}^{-3}-2\mathrm{e}^{-1}\simeq$ **3,46**

Remarque
On joint une représentation graphique (on peut obtenir ce graphique sur l'écran de la calculatrice).