Exercice 3 4 points

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0 ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.
On considère les points A(1;2;5), B(-1;6;4), C(7 ;-10;8) et D(-1;3;4).

1 . Proposition 1 : Les points A; B et C définissent un plan.

2 . On admet que les points A; B et D définissent un plan.
Proposition2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x-2z+9=0$.

3 . Proposition 3 : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}t-5 \\ y=-3t+14 \quad t\in\mathbb{R} \\ z=-\frac{3}{2}t+2 \end{cases}$$

4 . Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x-y+5z+7=0$ et $\mathscr{P}'$ le plan d'équation cartésienne $-3x-y+z+5=0$.
Proposition 4 : Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

Correction :

1 . **Proposition 1 : FAUSSE**

A(1;2;5), B(-1;6;4), C(7 ;-10;8)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\6-2\\4-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7-1\\-10-2\\8-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-12\\3\end{pmatrix}$

On remarque que $\boxed{\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}}$.

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires** et **les points A, B et C sont alignés**. (Il existe une infinité de plans contenant les points A, B et C).

2 . **Proposition 2 : VRAIE**

Soit P le plan le plan d'équation cartésienne : $x-2z+9=0$
A(1;2;5) $1-2\times5+9=0$ donc **$A\in P$**
B(-1;6;4) $-1-2\times4+9=0$ donc **$B\in P$**
D(-1;3;4) $-1-2\times4+9=0$ donc **$D\in P$**
A, B et D sont trois points du plan P.
On a : A, B et D définissent un plan donc P = (ABD)
Conséquence
Une équation cartésienne du plan (ABD) est : $\boxed{x-2z+9=0}$.

3 . **Proposition 3 : FAUSSE**

Soit $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases}x=\frac{3}{2}t-5\\y=-3t+14\\z=-\frac{3}{2}t+2\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

A(1;2;5).
Pour l'abscisse $1=\frac{3}{2}t-5 \Leftrightarrow 6=\frac{3}{2}t \Leftrightarrow t=\underline{4}$

Pour $t=4$:
$y=-3\times4+14=\underline{2}$ (ordonnée de A)
$z=-\frac{3}{2}\times4+2=\underline{4}\neq5$
donc **A n'appartient pas** à $\mathscr{D}$.
Conséquence
La représentation paramétrique donnée n'est pas une représentation paramétrique de la droite (AC).

4 . **Proposition 4 : FAUSSE**

$\mathscr{P}\ : 2x-y+5z+7=0$
$\mathscr{P}\ ' : -3x-y+z+5=0$

$\vec{N}\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$ est **un vecteur normal** à $\mathscr{P}$.

$\vec{N'}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$ est **un vecteur normal** à $\mathscr{P}\ '$.

Les vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{N'}$ **ne sont pas colinéaires** donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}\ '$ **ne sont pas parallèles.**