Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

5 points

Soit la suite (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par : $u_0=2$ et pour entier naturel n :

$u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+3\times 0,5^n$

1 .a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n									

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .

2 .a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0,5^n$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n=u_n-10\times 0,5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
On précisera le premier terme de la suite (v_n) .

b. En déduire, que pour tout entier naturel n : $u_n=-8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n+10\times 0,5^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4 . Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 2
Traitement :	Tant que …… (1)
	n prend la valeur ….(2)
	u prend la valeur …..(3)
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

<u>Correction :</u>

1 .a. En utilisant la calculatrice on obtient :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3.4	2.18	1.19	0.61	0.31	0.16	0.08	0.04

b. Conjecture :
La suite (u_n) est **décroissante à partir du rang 1**.

2 . On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel, non nul, on a :
$u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$.

Initialisation :

$u_1 = 3{,}4$

$\frac{15}{4}\times 0{,}5 = \frac{15}{8} < 2$

Donc, $u_1 \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5$

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité :

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel, non nul, on suppose que :
$u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$ et on doit démontrer que : $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^{n+1}$.

On multiplie les deux membres de la première inégalité par $\frac{1}{5}$ $\left(\frac{1}{5}>0\right)$.

$\frac{1}{5}\times u_n \geqslant \frac{1}{5}\times\frac{15}{4}\times 0{,}5^n$

On ajoute aux deux membres de la nouvelle inégalité : $3\times 0{,}5^n$

$\frac{1}{5}\times u_n + 3\times 0{,}5^n \geqslant \frac{1}{5}\times\frac{15}{4}\times 0{,}5^n + 3\times 0{,}5^n$

Dans le premier membre on obtient u_{n+1}

$u_{n+1} \geqslant \left(\frac{1}{5}\times\frac{15}{4}+3\right)\times 0{,}5^n$

$u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4}\times\left(\frac{1}{5}+3\times\frac{4}{15}\right)\times 0{,}5^n$

$u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4}\times(1)\times 0{,}5^n = \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$

Or, 0,5<1, donc $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n\times 0{,}5 = \frac{15}{4}\times 0{,}5^{n+1}$

Conclusion :

Le principe récurrence nous permet de conclure, que pour tout entier naturel non nul, on a : $u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$.

b. Pour tout entier naturel, non nul, n :

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{5}u_n+3\times0{,}5^n-u_n=-\frac{4}{5}u_n+3\times0{,}5^n$

Or, $u_n\geqslant\frac{15}{4}\times0{,}5^n$

Donc, $-\frac{4}{5}u_n\leqslant-\frac{4}{5}\times\frac{15}{4}\times0{,}5^n$

Et, $-\frac{4}{5}u_n\leqslant-3\times0{,}5^n$

Soit, $-\frac{4}{5}u_n+3\times0{,}5^n\leqslant-3\times0{,}5^n+3\times0{,}5^n=0$

On obtient $u_{n+1}-u_n\leqslant0$

Conséquence

La suite (u_n) est **décroissante à partir du rang 1**.

c. Pour tout entier naturel non non nul n : $u_n\geqslant\frac{15}{4}\times0{,}5^n>0$.

Donc, la suite (u_n) est **décroissante à partir du rang 1** et **minorée par 0**, la suite (u_n) est **convergente**.

3 . Pour tout entier naturel n on pose : $v_n=u_n-10\times0{,}5^n$

a. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-10\times0{,}5^{n+1}=\frac{1}{5}u_n+3\times0{,}5^n-10\times0{,}5^{n+1}$

On a $u_n=v_n+10\times0{,}5^n$

$v_{n+1}=\frac{1}{5}(v_n+10\times0{,}5^n)+3\times0{,}5^n-10\times0{,}5^{n+1}$

$v_{n+1}=\frac{1}{5}v_n+(2+3-10\times0{,}5)\times0{,}5^n$

$v_{n+1}=\frac{1}{5}v_n+(5-5)\times0{,}5^n$

$v_{n+1}=\frac{1}{5}v_n$

$v_0=u_0-10\times0{,}5^0=2-10=-8$

Conclusion

La suite (v_n) est **la suite géométrique** de **raison** $\frac{1}{5}$ et de **premier terme** $v_0=-8$.

b. Pour tout entier naturel n , $\boxed{v_n=v_0q^n=-8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

On a : $u_n=v_n+10\times0{,}5^n$

$\boxed{u_n=-8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n+10\times0{,}5^n}$

$0<0,5<1$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = \mathbf{0}$

$0<\frac{1}{5}<1$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \mathbf{0}$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathbf{0}$.

4 . **Entrée :** n et u sont des nombres
Initialisation : n prend la valeur 0
u prend la valeur 2
Traitement : Tant que : **u > 0,01**
n prend la valeur : **n + 1**
u prend la valeur : $\boxed{\frac{1}{5}u+3\times 0,5^n}$
Fin Tant que
Sortie : Afficher n