Exercice 4 — Candidats ayant suivi la spécialité — 5 points

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements : L'hébergement A et l'hébergement B. Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €. Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.
On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B.

1 .a. Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

b. Recopier et compléter les lignes (1), (2), et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples (x ; y) possibles.

```
Entrée :         x et y sont des nombres
Traitement :     Pour x variant de 0 …..          (1)
                     Pour y variant de 0 ….       (2)
                         Si …..                   (3)
                             Afficher x et y
                         Fin Si
                     Fin Pour
                 Fin Pour
Fin Traitement
```

2 . Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3 .a. Justifier que l'équation $8x+15y=1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

b. Déterminer une telle solution.

c. Résoudre l'équation (E) : $8x+15y=146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4 . Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A. Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui passées en hébergement B. Calculer ces nombres.

<u>Correction :</u>

On a $24x+45y=438$ et x et y sont des entiers naturels.

1 .a. On effectue les divisions euclidiennes de 438 par 24 puis par 45.
$438=18\times 24+6$
$438=9\times 45+33$

donc $\boxed{x\leqslant 18 \text{ et } y\leqslant 9}$

b. On complète les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme.

Entrée : x et y sont des nombres
Traitement : Pour x variant de 0 **à 18**
Pour y variant de 0 **à 9**
Si **24x+45y=438**
Afficher x et y
Fin Si
Fin Pour
Fin Pour
Fin Traitement

2 . <u>Remarque</u>
Le pgcd de 24 et 45 est égal à 3, donc le premier membre de l'équation $24x+45y$ est divisible par 3 donc pour qu'il existe au moins une solution au problème, il faut que le second membre de l'équation soit divisible par 3.
Or, $438=3\times 146$
La condition nécessaire d'existence de solutions à l'équation $24x+45y=438$ est **réalisée**.

3 .a. $8x+15y=1$
8 et 15 sont premiers entre eux, **le théorème de Bezout** nous permet d'affirmer qu'**il existe des solutions** à cette équation.

b. Pour déterminer une solution particulière à cette équation, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide mais pour cet exemple on peut remarquer que : $8\times 2+15\times(-1)=1$, c'est à dire le couple (2 ;-1) est **une solution particulière** de l'équation $8x+15y=1$.

c. On déduit de la question précédente que $(2\times 146;-1\times 146)=(292;-146)$ est une solution particulière de l'équation $8x+15y=146$.
Donc, $8\times 292+15\times(-146)=146$
L'équation à résoudre peut s'écrire $8x+15y=8\times 292+15\times(-146)$
Soit, $8\times(x-292)=15\times(-y-146)$

8 et 15 sont premiers entre eux, **le théorème de GAUSS** nous permet d'affirmer que :
15 divise (x-292), il existe donc un entier relatif k tel que $x-292=15k$, soit $\boxed{x=15k+292}$

Pour tout entier relatif k :
$8\times 15k=15\times(-y-146)$ donc $8k=-y-146$
soit $\boxed{y=-8k-146}$

Vérification

Pour tout entier relatif k :

$8\times(15k+292)+15\times(-8k-146)=8\times292-15\times146=146$

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation $8x+15y=146$ est **l'ensemble des couples** $\boxed{(15k+292\,;-8k-146)}$ lorsque $k\in\mathbb{Z}$.

4 . Le randonneur a passé au maximum 13 nuits en hébergement A donc $15k+292\leqslant 13$.

Soit, $k\leq\frac{-292+13}{15}=-\frac{279}{15}\approx-18,6$

k est un entier relatif donc $k\leqslant-19$

Nous avons vu que $y\leqslant9$

Donc, $-8k-146\leqslant9$ soit $-9-146\leqslant8k$ et $-\frac{155}{8}\leq k$

Or, $-\frac{155}{8}\approx-19,375$

k est un entier relatif donc $-19\leqslant k$

Conclusion

La seule valeur de k obtenue est $\boxed{k=-19}$, on a alors :

$\boxed{x=15\times(-19)+292=7}$

$\boxed{y=-8\times(-19)-146=6}$

Le randonneur a passé 7 nuits en hébergement A et 6 nuits en hébergement B.