Exercice 2 — 5 points

Le taux d' hématocrite est le pourcentage du volume de globules rouges par rapport au volume total du sang. On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française. On admet que cette variable suit une loi normale de moyenne $\mu = 45{,}5$ et d'écart type σ.

Partie A

On note Z la variable aléatoire $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-45{,}5}{\sigma}$

1 .a. Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?

b. Déterminer $P(X\leqslant\mu)$.

2. En prenant $\sigma=3{,}8$, déterminer $P(37{,}9\leqslant X\leqslant 53{,}1)$. Arrondir le résultat au centième.

Partie B

Une certaine maladie V est présente dans la population française avec la fréquence 1 %. On sait d'autre part que 30 % de la population française a plus de 50 ans, et que 90 % des porteurs de la maladie V dans la population française au plus de 50 ans.

On choisit au hasard un individu dans la population française.
On appelle α l'unique réel tel que $P(X\leqslant\alpha)=0995$, où X est la variable aléatoire définie au début de l'exercice.
On ne cherchera pas à calculer α.
on définit les événements :
M « l'individu est porteur de la maladie V » ;
S « L'individu a plus de 50 ans » ;
H « l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α ».

Ainsi $P(M)=0{,}01$, $P_M(S)=0{,}9$ et $P(H)=P(X>\alpha)$.
D'autre part, une étude statistique a révélé que 60 % des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V.

1 .a. Déterminer $P(M\cap S)$;

b. On choisit au hasard un individu ayant plus de 50 ans. Montrer que la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est égale à 0,03.

2 .a. Calculer la probabilité P(H).

b. L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieure ou égal à α. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V. Arrondir au millième.

Partie C

Le but de cette partie est d'étudier l'influence d'un gène sur la maladie V.
1 . Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de la maladie V dans les échantillons

de taille 1000, prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble de la population française. On arrondira les bornes de l'intervalle au millième.

2 . Dans un échantillon aléatoire de 1000 personnes possédant le gène, on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V. Au regard de ce résultat,peut-on décider,au seuil de 95 %, que le gène a une influence sur la maladie ?

Correction :

Partie A

1 .a. Z suit la loi normale centrée et réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

b. $P(X \leqslant \mu) = P(Z \leqslant 0) = 0,5$.

2 . $45,5 + 2 \times 3,8 = 45,5 + 7,6 = 53,1$
$45,5 - 2 \times 3,8 = 45,5 - 7,6 = 37,9$
$P(37,9 \leqslant X \leqslant 53,1) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0,95$
On peut retrouver ce résultat en utilisant la calculatrice.

Partie B

L'énoncé précise :

- Une certaine maladie V présente dans la population française avec la fréquence 1 %, c'est à dire $P(M) = 0,01$.
- 30 % de la population française a plus de 50 ans, c'est à dire $P(S) = 0,3$.
- 90 % des porteurs de la maladie V dans la population française ont plus de 50 ans, c'est à dire $P_M(S) = 0,9$.
- $P(H) = P(X > \alpha) = 1 - P(X \leqslant \alpha) = 1 - 0,995 = 0,005$.
- 60 % des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V, c'est à dire $P_H(M) = 0,6$.

1 .a. $P(M \cap S) = P(M) \times P_M(S) = 0,01 \times 0,9$
$\boxed{P(M \cap S) = 0,009}$

b. On nous demande de déterminer $P_S(M)$

$$P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0,009}{0,3} = 0,03$$

$P_S(M) = 0,03$

2 .a. $P(H) = P(X < \alpha) = 1 - P(X < \alpha) = 1 - 0,995$
$P(H) = 0,005$

b. On nous demande de calculer $P_{\bar{H}}(M)$

$$P_{\bar{H}}(M) = \frac{P(\bar{H} \cap M)}{P(\bar{H})}$$

On a $P(\bar{H}) = 0,995$
La formule des probabilités totales nous donne :
$P(M) = P(\bar{H} \cap M) + P(H \cap M)$
Or, $P(M) = 0,01$ et $P(H \cap M) = P(H) \times P_H(M) = 0,005 \times 0,6 = 0,003$
$0,01 = P(\bar{H} \cap M) + 0,003$
soit $P(\bar{H} \cap M) = 0,01 - 0,003 = 0,007$

$$P_{\bar{H}}(M) = \frac{0,007}{0,995} = \frac{7}{995} \simeq 0,007$$

$P_{\bar{H}}(M) = 0,007$

Partie C

1 . L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\boxed{I=\left[p-1,96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+1,96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]}$$ (si $n\geqslant 30$; $pn\geqslant 5$ et $(1\text{-}p)n\geqslant 5$)

Ici, $p=0{,}01$ $n=1000\geqslant 30$ $np=10\geqslant 30$ $n(1\text{-}p)=990\geqslant 5$

$$I=\left[0{,}01\ 1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}01\times 0{,}99}}{\sqrt{1000}}\,;0{,}01+\frac{1{,}96\times\sqrt{0{,}01}\times 0{,}99}{\sqrt{1000}}\right]$$

$$1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}01\times 0{,}99}}{\sqrt{1000}}\simeq 0{,}006$$

$0{,}01-0{,}006=0{,}004$ et $0{,}01+0{,}006=0{,}016$

I=**[0,004;0,016]**

2 . La proportion de personnes porteuses de la maladie V dans l'échantillon de 1000 personnes est : $\frac{14}{1000}=0{,}014$

0,014 **appartient à l'intervalle *I*** donc au seuil de 95 % on peut af**firmer que le gène n'a pas d'influence sur la maladie**.