Exercice 3 6 points

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur [-1;1] par : $g(x)=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})$ où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g . On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation : $(x-1)e^{2x}-1-x=0$
Dans la suite, on définit sur [0;+∞[la fonction f par $f(x)=(x-1)e^{2x}-1-x$.

1 . Déterminer la fonction dérivée de la fonction f .
Vérifier que $f'(0)=-2$ et que $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.

2 . On note f'' la fonction dérivée de f' .
Vérifier que, pour tout réel $x\geqslant 0$, $f''(x)=4xe^{2x}$

3 . Montrer que, sur l'intervalle [0 ; +∞[la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0 .

4 .a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; +∞[, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;x_0]$.

b. Calculer $f(2)$.
En déduire que sur l'intervalle [0 ; +∞[, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

5 . On admet sans démonstration que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression :
$L=\int_0^1 (e^{ax}+e^{-ax})\,dx$
Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant 1,2 comme valeur approchée de a.

Correction :

1 . f est dérivable sur [0 ; +∞[

$f'(x)=e^{2x}+(x-1)(2e^{2x})-1=(2x-1)e^{2x}-1$ car $(e^{2x})'=2e^{2x}$

$f'(0)=(2\times 0-1)e^{0}-1=-1-1=-2$

$f'(0)=2$

$\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$

donc $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

2 . f' est dérivable sur [0 ; +∞[

$f''(x)=2e^{2x}+(2x-1)(2e^{2x})=2e^{2x}+4xe^{2x}-2e^{2x}=4xe^{2x}$

$\boxed{f''(x)=4xe^{2x}}$

3 . $f''(0)=0$ et pour tout nombre réel strictement positif on a : $f''(x)>0$ donc f' est strictement croissante sur [0;+∞[.

f' est continue est strictement croissante sur [0 ; +∞[à valeurs dans [-2 ; +∞[.

Le **théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer que 0∈[-0 ; +∞[admet un unique antécédent par f: x_0 ∈[0 ; +∞[, c'est à dire que l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution x_0 ∈[0 ; +∞[.

Remarque :

$f'(0)=-2$ donc $x_0>0$.

4 .a. f' est strictement croissante sur [0 ; +∞[donc :

Si $0<x<x_0$ alors $f'(x)<f'(x_0)=0$

Si $x_0<x$ alors $f'(x_0)=0<f'(x)$

On donne les variations de f sous **la forme d'un tableau**

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↘	$f(x_0)$	↗	

$f(0)=(0-1)e^{0}-1=-2$

f est **strictement décroissante** sur [0 ; x_0] donc pour tout x∈[0 ; x_0], $\boxed{f(x)\leqslant f(0)=-2}$

f est **strictement négative** sur [0 ; x_0] en particulier $\boxed{f(x_0)<0}$

b. $f(2)=(2-1)e^{4}-3>0$ $f(2)\simeq 51,6$

f est **strictement négative** sur [0 ; x_0] donc l'équation $f(x)=0$ **n'admet pas de solution** sur [0 ; x_0].

f est continue et strictement croissante sur [x_0 ; +∞[, $f(x_0)<0$ et $f(2)>0$ donc 0 appartient à l'ensemble des valeurs de f sur[x_0 ; +∞[.

Le **théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent a par f

appartenant à [x_0 ;+∞[, c'est à dire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution a appartenant à :
[x_0 ; +∞[.

Conclusion

L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution appartenant à [0 ; +∞[. (cette solution a appartient à [x_0 ;+∞[).
En utilisant la calculatrice on obtient :
$f(1,19) \simeq -0,4$ et $f(1,20) \simeq 0,005$
$1,19 < a < 1,20$ et $f(1,195) \simeq -0,07$

1,20 est une valeur approchée de a arrondie au centième.

5 . $L=\int_0^1 (e^{ax}+e^{-ax})\,dx$

$a=1,2$

$L=\int_0^1 (e^{1,2x}+e^{-1,2x})\,dx$

$a>0$, $h(x)=e^{ax}$, une **primitive** de h sur $\mathbb{R}$ est H telle que $H(x)=\frac{e^{ax}}{a}$

$$L=\left(\frac{e^{1,2\times1}}{1,2}-\frac{e^{-1,2\times1}}{1,2}\right)-\left(\frac{e^{0}}{1,2}-\frac{e^{0}}{1,2}\right)$$

$$L=\frac{e^{1,2}-e^{-1,2}}{1,2}\ \boxed{\simeq 2,5}$$