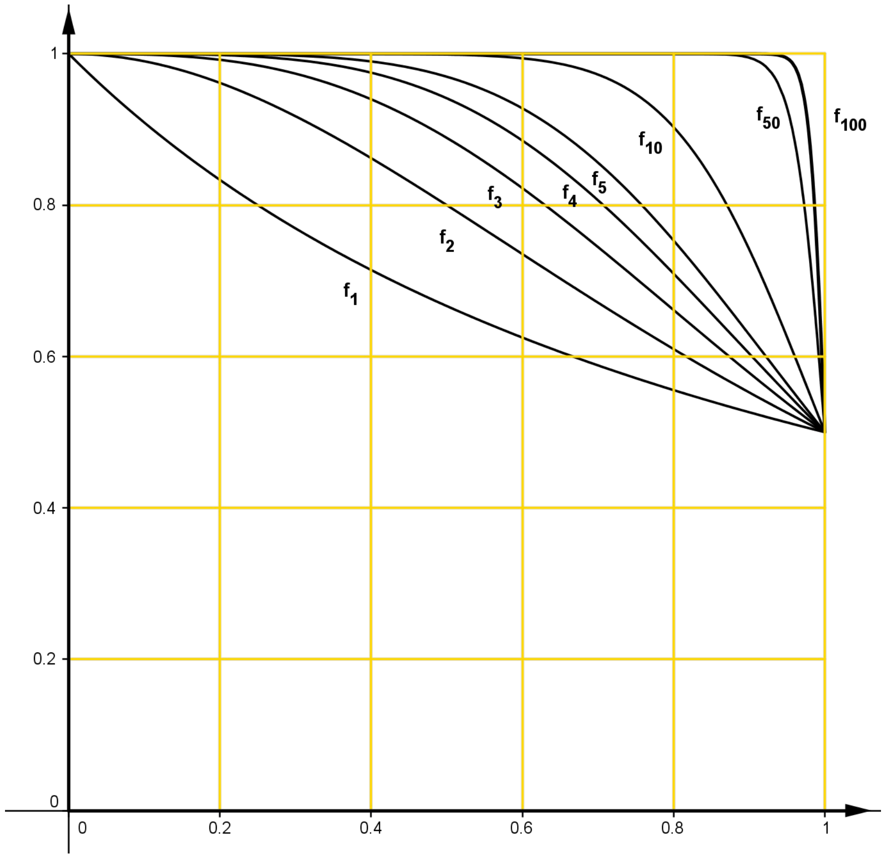
Exercice 4 — Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle [0;1] par : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^n}$.

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on définit le nombre I_n par : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1 . Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après. En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de sa limite, lorsque n tend vers $+\infty$.



2 . Calculer la valeur exacte de I_1 .

3 .a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0;1] et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a : $\mathrm{I}_n \leqslant 1$.

4 . Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0;1] et pour tout entier naturel, $n\geqslant 1$, on a : $1-x^n\leqslant\dfrac{1}{1+x^n}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

5 . Calculer l'intégrale $\int_0^1 (1-x^n)\,dx$

6 . A l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7 . On considère l'algorithme suivant :

Variables : n,p et k sont des entiers naturels
x et I sont des réels

Initialisation : I prend la valeur 0

Traitement : Demander un entier n ⩾ 1
Demander un entier p ⩾ 1
Pour k allant de 0 à p – 1 faire :
x pend la valeur $\frac{k}{p}$
I prend la valeur $I+\frac{1}{1+x^n}\times\frac{1}{p}$
Fin Pour
Afficher I

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n=2$ et $p=5$? On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n .

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Correction :

1 . f_n est continue et positive sur [0;1] donc I_n est **l'aire**, en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe représentative de f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=0$ et $x=1$.
La suite (I_n) est donc bien définie.
En utilisant les représentations graphiques, on conjecture que, pour tout entier naturel non nul n , la courbe représentative de f_{n+1} est au dessus de celle de f_n donc la suite (I_n) est **croissante**.
La courbe représentative de f_{100} est « très proche » de la courbe représentative de la fonction égale à 1 sur [0;1]. On conjecture que la limite de la suite (I_n) est l'aire, en U.A. d'un carré de côté 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n =$**1**.

2 . $I_1=\int_0^1 f_1(x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$

$F_1(x)=\ln(1+x)$

F_1 est **une primitive** de f_1 sur [0;1].

$I_1=F_1(1)-F_1(0)=\ln 2-\ln 1=\ln 2$

$I_1 =$**ln2**

3 .a. Pour tout entier naturel non nul n ,

$1-\frac{1}{1+x^n}=\frac{1+x^n-1}{1+x^n}=\frac{x^n}{1+x^n}\geqslant 0$ (car $x\in[0;1]$)

Conséquence

Pour tout entier naturel non nul n , $\frac{1}{1+x^n}\leqslant 1$

b. Pour tout entier naturel non nul n et tout nombre réel x appartenant à [0;1], $\frac{1}{1+x^n}\leqslant 1$

En utilisant **une propriété du calcul intégral** on obtient :

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx\leqslant\int_0^1 1\,dx$

$k(x)=1\qquad K(x)=x$

K est **une primitive** de k sur [0;1]

$\int_0^1 1\,dx=K(1)-K(0)=$**1**

et $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx = I_n$

Conséquence

Pour tout entier naturel non nul n , $I_n\leqslant 1$.

4 . Pour tout entier naturel non nul n ,

$\frac{1}{1+x^n}-(1-x^n)=\frac{1}{1+x^n}-\frac{1+x^n}{1+x^n}+\frac{x^n(1+x^n)}{1+x^n}=\frac{1-1-x^n+x^n+x^{2n}}{1+x^n}=\frac{x^{2n}}{1+x^n}\geqslant 0$

(car $x\in[0;1]$)

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Conséquence :

Pour tout entier naturel n : $\boxed{1-x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}}$

5 . Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur l'intervalle [0;1] la fonction g_n : $g_n(x)=1-x^n$.

$G_n(x)=x-\frac{x^{n+1}}{n+1}$

G_n est **une primitive** de g_n sur [0;1].

Et, $\boxed{\int_0^1 (1-x^n)\,dx = G_n(1)-G_n(0)=1-\frac{1}{n+1}}$

6 . Pour tout entier naturel non nul n, $1-x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$

Donc, $\int_0^1 (1-x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$

Soit, $1-\frac{1}{n+1} \leqslant I_n$

On obtient donc pour tout entier naturel non nul, l'encadrement suivant de I_n :

$1-\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, **le théorème des gendarmes** non permet de conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \mathbf{1}$

8 .a. $n=2$ et $p=5$

$k=0 \quad x=\frac{0}{5}=0 \quad I=0+\frac{1}{1+0}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}=0{,}2$

$k=1 \quad x=\frac{1}{5}=0{,}2 \quad I=0{,}2+\frac{1}{1+\frac{1}{25}}\times\frac{1}{5}=0{,}2+\frac{5}{26}\approx 0{,}392$

$k=2 \quad x=\frac{2}{5}=0{,}4 \quad I=0{,}392+\frac{1}{1+\frac{4}{25}}\times\frac{1}{5}=0{,}392+\frac{5}{29}\approx 0{,}564$

$k=3 \quad x=\frac{3}{5}=0{,}6 \quad I=0{,}564+\frac{1}{1+\frac{9}{25}}\times\frac{1}{5}=0{,}564+\frac{5}{34}\approx 0{,}712$

$k=4 \quad x=\frac{4}{5}=0{,}8 \quad I=0{,}712+\frac{1}{1+\frac{16}{25}}\times\frac{1}{5}=0{,}712+\frac{5}{41}\approx 0{,}834$

On obtient le tableau suivant :

k	x	I
0	0	0.2
1	0.2	0.392
2	0.4	0.564
3	0.6	0.712
4	0.8	0.834

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

b. Pour n fixé l'algorithme affiche I= $\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{p} f\left(\frac{k}{p}\right)$

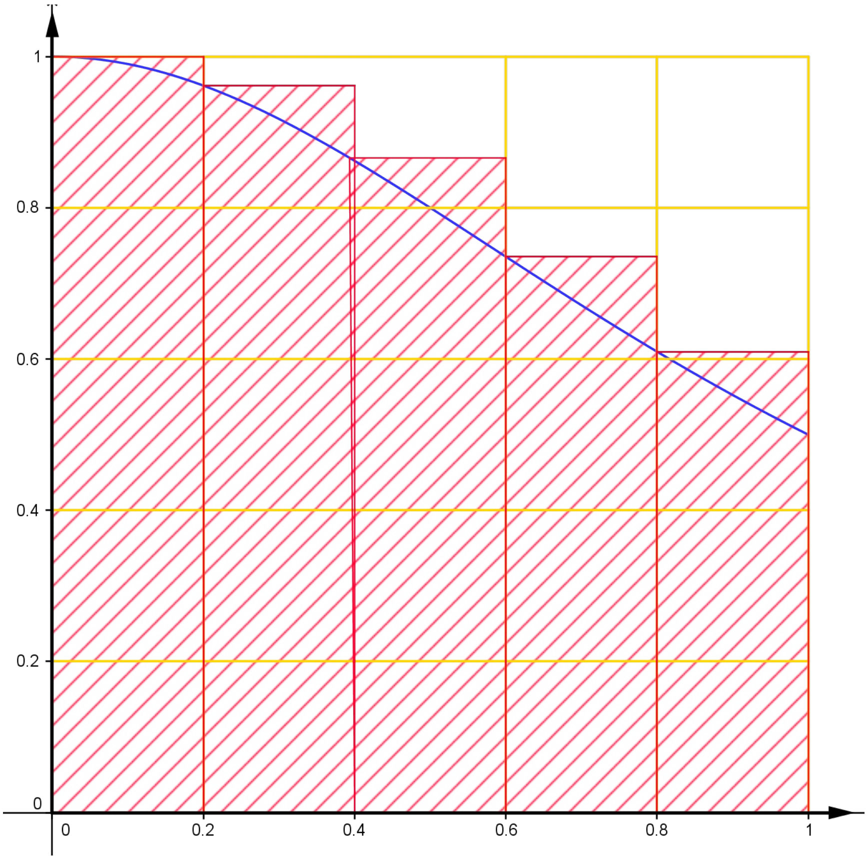
I est une valeur approchée de I_n obtenue en utilisant la méthode des rectangles.

Remarques

• On peut vérifier que, pour tout entier naturel non nul n, f_n est décroissante sur [0;1], donc la méthode des rectangles en faisant varier k de 0 à $p-1$ donne une valeur une valeur approchée par excès. (si on faisait varier k de 1 à p , on obtiendrait une valeur approchée par défaut).

• Pour $n=2$, on peut démontrer (non au programme de TS) que $I_2 = \frac{\pi}{4} \simeq 0,785$.

On obtient pour $p=5$, I=0,834 et on joint la figure suivante : la courbe représentative de f_2 et I est l'aire, en U.A., de la partie de plan hachurée.



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés