Exercice 4 — Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

Partie A

Le but de cette partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1 . On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés $p_1\, p_2 \ldots\ldots p_n$. On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 : $E = p_1 \times p_2 \times \ldots\ldots\ldots \times p_n + 1$
Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des nombres p_1 , p_2 , …, p_n .
2 . En utilisant le fait que E admet un diviseur premier conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$. On dit que M_k est le $k^{\text{ième}}$ nombre de Mersenne.

1 .a. Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k									

b. D'après le tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier ?

2 . Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

a. Justifier l'égalité : $1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \ldots\ldots\ldots (2^p)^{q-1} = \dfrac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$

b. En déduire que 2^{pq} - 1 est divisible par 2^p -1.

c. En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

3 .a. Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1 .b. ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n^{\ 2} - 2$.
Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} = 0$ modulo M_n . Cette propriété est admise dans la suite.

1 . Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier.

2 . soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

Variables :	u,M,n et i sont des entiers naturels
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier n ⩾ 3 M prend la valeur ….......... Pour i allant de 1 à ...faire u prend la valeur...... Fin Pour Si M divise u alors afficher « M........... » sinon afficher « M........... »

Recopier et compléter cet algorithme de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue.

Correction :
Partie A

1 . 1 n'est un nombre premier, donc **tous les nombres premiers sont supérieurs ou égaux à 2** et $p_1 \times p_2 \times \ldots\ldots\ldots \times p_n \geqslant 2$.

Rappel
Tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas.
Si $k \in \mathbb{N}\ 1 \leqslant k \leqslant n \quad p_k$ est un nombre premier.
$p_1 \times \ldots\ldots \times p_k \times \ldots\ldots \times p_n \equiv 0$ modulo p_k
et $E \equiv 1$ modulo p_k
p_k ne divise pas E donc p_k est **premier avec E**.

2 . On suppose que les n nombres premiers sont rangés dans l'ordre croissant c'est à dire que p_n est le plus grand nombre premier.
E est un entier naturel supérieur ou égal à 2, il admet au moins un diviseur premier or tous les nombres premiers p_1 ; p_2 ; … p_n sont premiers avec E donc le plus petit nombre premier divisant E est strictement supérieur à p_n.
Conclusion
Il existe au moins un nombre premier distinct de p_1, p_2, ... p_n et il y a contradiction avec l'hypothèse : « il n'existe que n nombres premiers : $p_1, p_2, \ldots, p_n$ » donc **l'ensemble des nombres premiers est infini**.

Partie B

1 .a. $M_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ $\quad M_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ $\quad M_4 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$
$M_5 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$ $\quad M_6 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ $\quad M_7 = 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$
$M_8 = 298 - 1 = 256 - 1 = 255$ $\quad M_9 = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$ $\quad M_{10} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$
On donne les valeurs de M_k **dans un tableau**

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

b. Les nombres premiers inférieurs à 10 sont : 2 ; 3 5 ; 7.
M_2 = **3** nombre premier $\quad$ M_3 = **7** nombre premier
M_5 = **31** nombre premier $\quad$ M_7 = **127** nombre premier

On peut penser conjecturer : « le nombre de Mersenne M_k est **premier** si k est **premier** »

2 .a. p et q sont deux entiers naturels non nuls.
$S_q = 1 + 2^p + (2^p)^2 + 2^p)^3 + \ldots\ldots + (2^p)^{q-1}$
S_q est la somme des q premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2^p donc :
$$S_q = \boxed{\frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}}$$

b. Conséquence
$(2^p-1)[1+2^p+...+(2^p)^q]=(2^p)^q-1$
donc 2^p-1 **divise** $(2^p)^q-1$

c. k est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si k n'est pas un nombre premier, on note p le plus petit diviseur premier de k donc $p\geqslant 2$.
$k=pq$ (q est un entier naturel supérieur ou égal à p et q n'est pas nécessairement un nombre premier).
$M_k=(2^p)^q-1$
M_k est divisible par $2^p-1\neq 1$
et $M_k\neq 2^p-1$ car $2\leqslant p\leqslant q$
donc M_k **n'est pas un nombre premier**.

3 .a. $M_{11}=2^{11}-1=2048-1=$**2047**
On vérifie que $M_{11}=23\times 89$
Donc, M_{11} **n'est pas un nombre premier**.

b. 11 est un nombre premier et M_{11} n'est pas un nombre premier donc la conjecture de la question 1 .b. est **fausse**.

Partie C

1 . $M_5=$**31**
$u_{5-2}=u_3$
$u_1=u_0^2-2=16-2=$**14**
$u_2=u_1^2-2=14^2-2=196-2=$**194**
$u_3=u_2^2-2=194^2-2=37636-2=$**37634**
En utilisant la calculatrice on obtient : $37634=31\times 1214$
Donc, $u_3\equiv 0$ modulo 31
Conclusion
$M_5=31$ **est un nombre premier**.

2 .

Variables : u, M, n et i sont des entiers naturels

Initialisation : u prend la valeur 4

Traitement :
Demander un entier n $\geqslant$ 3
M prend la valeur 2^n **- 1**
Pour i allant de 1 à **n – 2** faire
u prend la valeur u^2 -2
Fin pour
Si M divise u alors afficher : **« M n'est pas un nombre premier »**
Sinon afficher : **« M est un nombre premier »**