Exercice 2 4 points

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n \end{cases} \quad \text{(pour tout entier naturel } n\text{).}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes.

1 . a. Calculer z_1 , z_2 et z_3 .

b. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de **l'annexe, à rendre avec la copie.**

c. Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.

d. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .

2 . Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

La suite (r_n) est-elle convergente ?
Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3 etc.

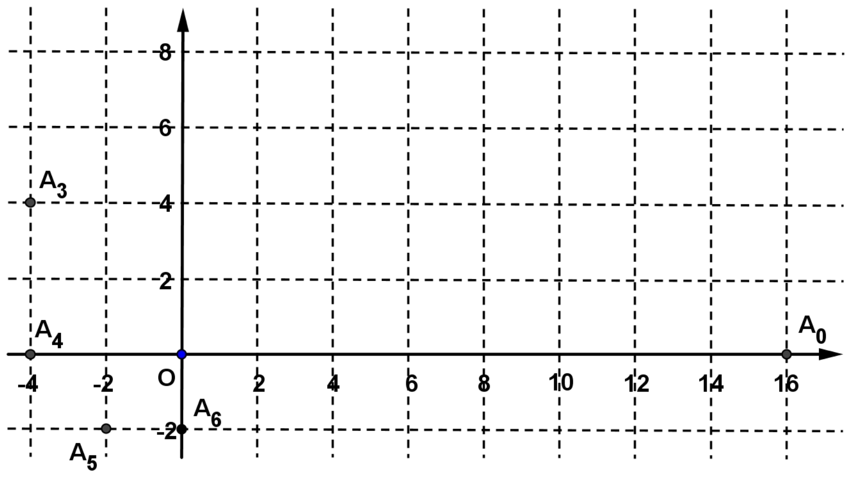
Ainsi, $L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$

3 . a. Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

b. Donner une expression de L_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite éventuelle de la suite(L_n).

ANNEXE (exercice 2)



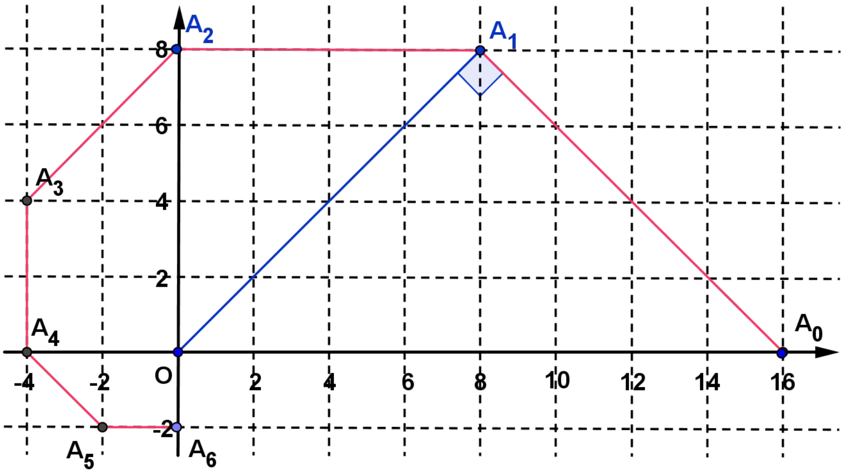
Correction :

1 .a. $\boxed{z_1=\frac{1+i}{2}z_0=\frac{1+i}{2}\times 16=8(1+i)=8+8i}$

$\boxed{z_2=\frac{1+i}{2}\times 8(1+i)=4(1+i)^2=4(1+2i+i^2)=8i}$

$\boxed{z_3=\frac{1+i}{2}\times 8i=4i(1+i)=4i-4=-4+4i}$

b.



c. $\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{|1+i|}{2}=\frac{\sqrt{1+1}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1+i}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc, $\theta=\frac{\pi}{4}$ (2π)

$\frac{1+i}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

d. $\overrightarrow{OA_0}$ (16) $\qquad OA_0=r_0=16$

$\overrightarrow{OA_1}$ (8+8i) $\qquad OA_1=r_1=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$

$\overrightarrow{A_0A_1}$ (-8+8i) $\qquad A_0A_1=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$

$OA_1=A_0A_1$ donc, le triangle OA_0A_1 est **isocèle** en A_1 .

$OA_1^2+A_0A_1^2=64\times 2+64\times 2=256=16^2=OA_0^2$. La réciproque du théorème de Pythagore nous permet d'affirmer que le triangle OA_0A_1 est **rectangle** en A_1 .

Conclusion :
Le triangle OA_0A_1 est **rectangle isocèle** en A_1 .

2 . Pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n$$

Donc, $|z_{n+1}|=\left|\frac{1+i}{2}\right|\times|z_n|$

Soit, $r_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}r_n$

La suite (r_n) est **la suite géométrique** de premier terme r_0 =**16** et de raison $q=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

$0<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ donc la suite (r_n) **converge vers 0**.

$r_n = OA_n$ lorsque n est « très grand » , r_n est « voisin de zéro » et A_n est « voisin de l'origine O ».

3 . a. Pour tout entier naturel n :

$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ (z_{n+1} - z_n)

$$z_{n+1}-z_n=\left(\frac{1+i}{2}\right)z_n-z_n=\left(\frac{-1+i}{2}\right)z_n$$

$$A_nA_{n+1}=\boxed{|z_{n+1}-z_n|=\left|\frac{-1+i}{2}\right|\times|z_n|=\frac{\sqrt{2}}{2}r_n=r_{n+1}}$$

b. $L_n=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n=r_1+r_2+\ldots+r_n$

C'est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison : $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$L_n=r_1\times\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\times16\times\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

c.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=$**0** donc $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\times16\times\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\times16\times\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=8\sqrt{2}\times\frac{2}{2-\sqrt{2}}=16\sqrt{2}\times\frac{2+\sqrt{2}}{4-2}=8\sqrt{2}(2+\sqrt{2})=16\sqrt{2}+16$$

$$\lim_{n\to+\infty}L_n=\boxed{16\sqrt{2}+16}$$