Exercice 3 — 7 points

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0{,}01$;
- $x = 0{,}02$

et ainsi de suite jusqu'à $x = 0{,}99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur [0;1] est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle [0;1] ;
- f est croissante sur l'intervalle [0;1].

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0{,}2^2 = 0{,}04$.
L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2, prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2} \simeq 0{,}45$. L'image A sera transformée en image C ci-dessous.

0.20	0.40
0.60	0.80

Image A

0.04	0.16
0.36	0.64

Image B

0.45	0.63
0.77	0.89

Image C

Partie A

1 . On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle [0;1] par : $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$

a. Démontrer que f_1 est une fonction de retouche.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.
Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2 . On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle [0;1] par : $f_2(x) = \ln[1 + (\mathrm{e} - 1)x]$;
On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle [0;1] la fonction g par : $g(x)=f_2(x)-x$.

a. Établir que, pour tout x de l'intervalle [0;1] : $g'(x)=\frac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}$;

b. Déterminer les variations de la fonction g sur[0;1]. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c. Établir que l'équation $g(x)=0{,}05$ admet sur l'intervalle [0;1] deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$.
On admettra que : $0{,}08 < \alpha < 0{,}09$ et que : $0{,}85 < \beta < 0{,}86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

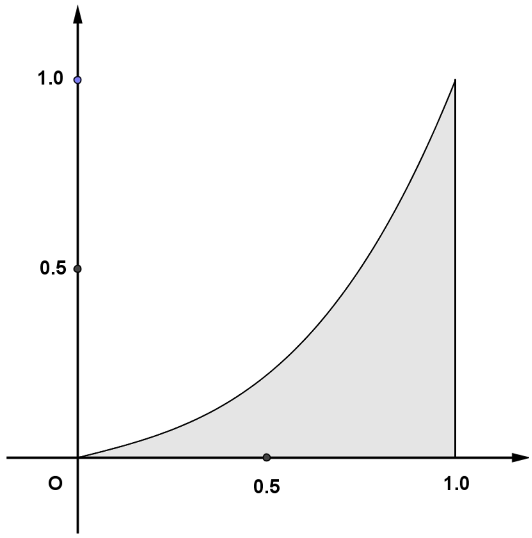
1 . Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche. Quel est le rôle de cet algorithme ?

```
Variables :        x (nuance initiale)
                   y (nuance retouchée)
                   E (écart)
                   c (compteur)
                   k entier naturel
Initialisation :   c prend la valeur 0
Traitement :       Pour k allant de 0 à 100, faire
                       x prend la valeur k/100
                       y prend la valeur f(x)
                       E prend la valeur | y – x |
                           Si E > 0,05, faire
                               c prend la valeur c + 1
                           Fin Si
                   Fin Pour
Sortie :           Afficher c
```

2 . Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A.**

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est à dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle [0;1], $f(x)\leqslant x$. On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathscr{A}$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.



Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image est celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

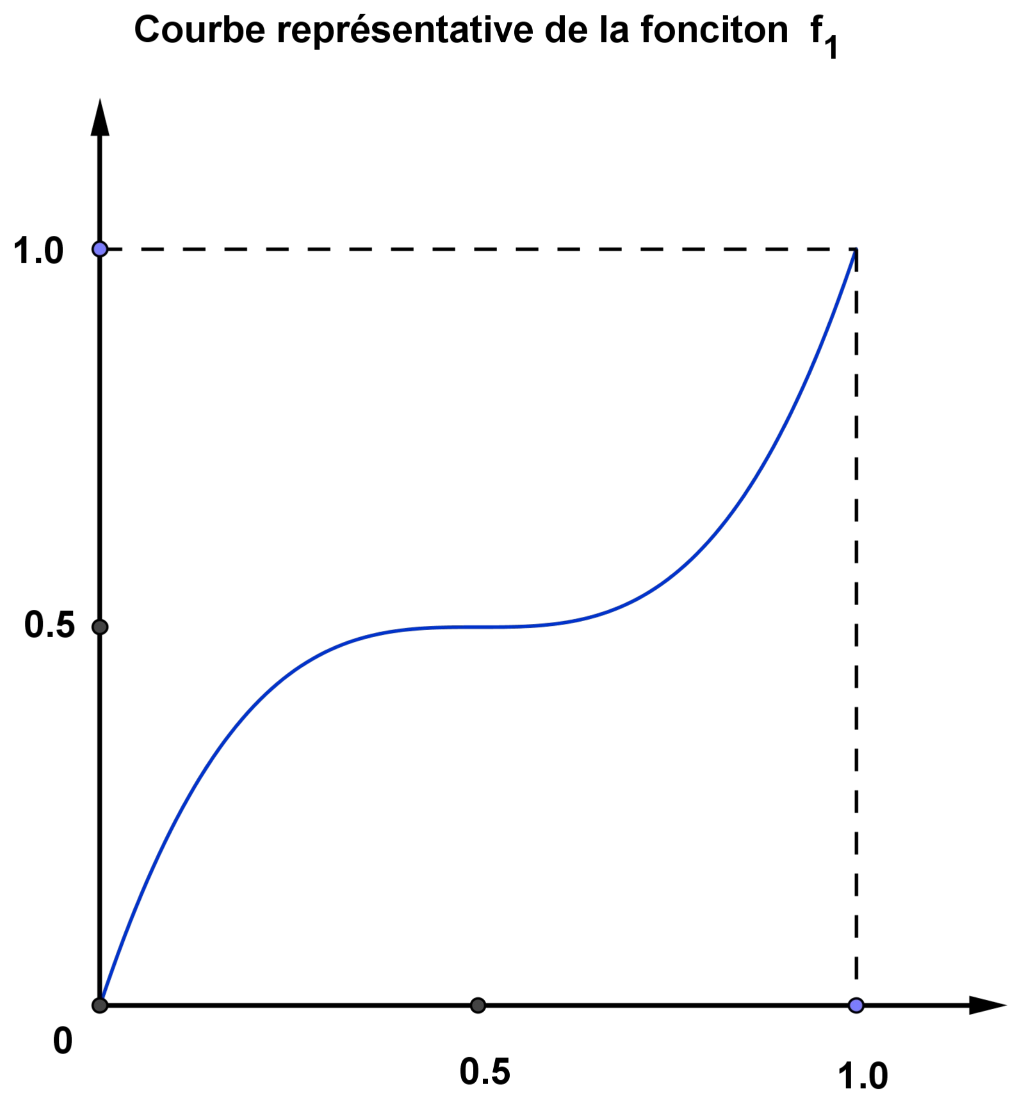
$f_1(x)=x\,e^{(x^2-1)}$ et $f_2(x)=4x-15+\dfrac{60}{x+4}$

1 . a. Calculer $\mathscr{A}_1$ (pour la fonction f_1)

b. Calculer $\mathscr{A}_2$ (pour la fonction f_2)

2 . De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

ANNEXE (exercice 3 Partie A)



Correction :
Remarques préliminaires
. $f(x)=x^2$
$f(0)=0$ et $f(1)=1$
f est continue est croissante sur [0;1]
Pour tout nombre réel x appartenant à $[0;1]$, $x-f(x)=x-x^2=x(1-x)\geqslant 0$ donc $x\geqslant f(x)$
f est **une fonction de retouche qui éclaircit**.

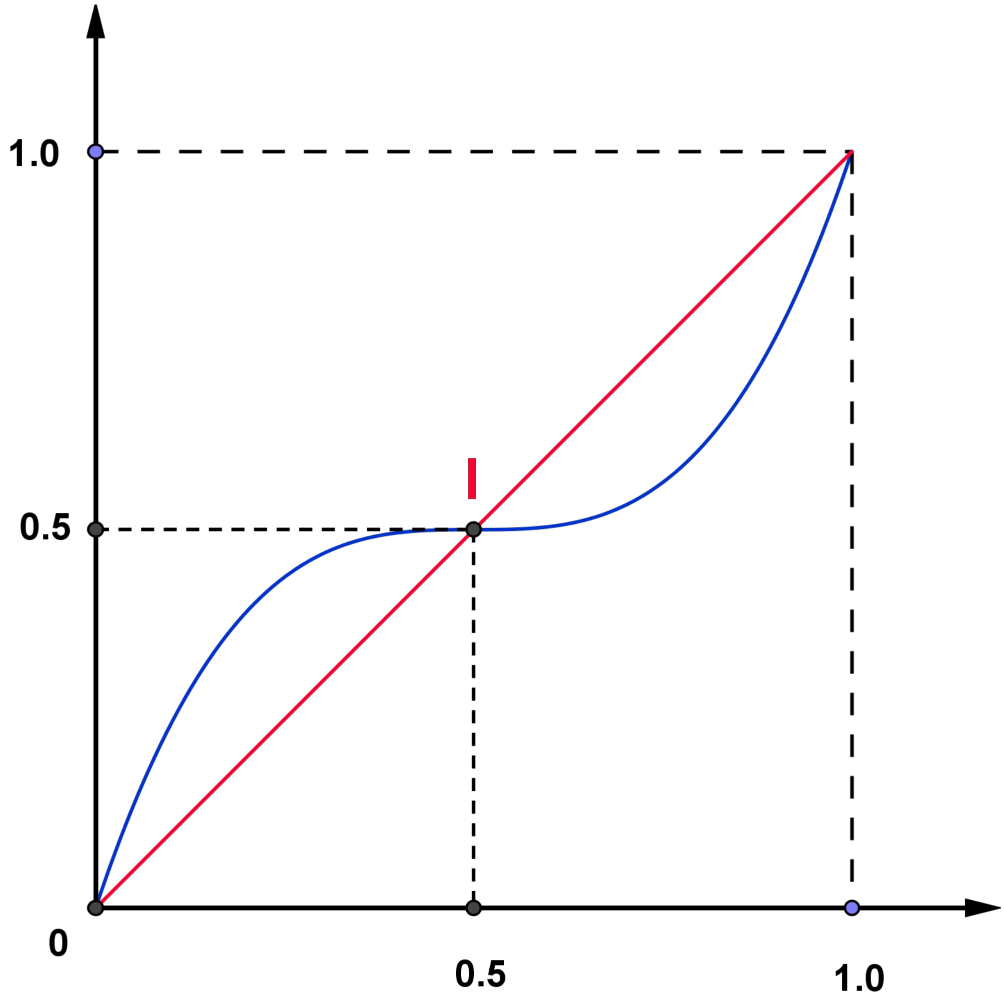
. $f(x)=\sqrt{x}$
$f(0)=0$ et $f(1)=1$
f est continue et croissante sur [0;1]
Pour tout nombre réel x appartenant à [0;1], $f(x)-x=\sqrt{x}-x=\sqrt{x}(1-\sqrt{x})\geq 0$
f est **une fonction de retouche qui assombrit**.

Partie A

1 . Pour tout nombre réel x appartenant à [0;1]
$f_1(x)=4x^3-6x^2+3x$

a. $f_1(0)=0$ et $f_1(1)=1$
f_1 est continue et dérivable sur [0;1]
$f'_1(x)=12x^2-12x+3=3(4x^2-4x+1)=3(2x-1)^2\geqslant 0$
donc f_1 est **croissante** sur [0;1] et f_1 est **une fonction de retouche**.

b. Sur le graphique, on trace le segment de la droite Δ d'équation $y=x$ pour $x\in[0;1]$.
Pour comparer $f_1(x)$ et x , il suffit de comparer les positions de la courbe $\mathscr{C}_1$ et de la droite Δ sur [0;1].
On utilise la figure donnée en annexe.



Δ et $\mathscr{C}_1$ sont sécantes en I(0,5;0,5).
Sur l'intervalle [0;0,5], $\mathscr{C}_1$ est **au dessus** de Δ.
Sur l'intervalle [0,5;1], $\mathscr{C}_1$ est **en-dessous** de Δ.

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f_1(x)\leqslant x$ est [0,5;1].
De même l'ensemble des solutions de l'inéquation $f_1(x)\geqslant x$ est [0;0,5].

Conclusion
Si $x\in[0;0,5]$ alors f_1 est **une fonction de retouche qui assombrit**.
Si $x\in[0,5;1]$ alors f_1 est **une fonction de retouche qui éclaircit**.

2 . Pour tout nombre réel x appartenant à [0;1], $f_2(x)=\ln[1+(\mathrm{e}-1)x]$
On admet que f_2 est une fonction de retouche.

a. On note $g(x)=f_2(x)-x$ pour $x\in[0;1]$, $g(x)=\ln[1+(\mathrm{e}-1)x]-x$
g est dérivable sur [0;1]
Pour tout nombre réel x appartenant à [0;1]
$g'(x)=\frac{\mathrm{e}-1}{1+(\mathrm{e}-1)x}-1$ car $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$$\boxed{g'(x)=\frac{(\mathrm{e}-1)-1-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}=\frac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}}$$

b. $g'(x)=0 \Leftrightarrow (\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x=0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}=x$ ($0<\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}<1$)

$g'(x)>0 \Leftrightarrow x<\frac{\mathrm{e}-2}{e-1}$

$g'(x)<0 \Leftrightarrow x>\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$

On obtient de variations de g :

x	0	$\frac{e-2}{e-1}$	0
g'(x)	+	0	-
g(x)	0 ↗	m	↘ 0

Donc, g admet un maximum m en $\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$, en utilisant la calculatrice on obtient $m \simeq 0{,}12$

c . g est continue et strictement croissante sur $\left[0;\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}\right]$, $g(0)=0$ et $g\left(\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}\right)=m \quad \simeq 0{,}12$

0,05∈[0;m], le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0,05 admet un unique antécédent $\alpha \in \left[0;\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}\right]$ donc l'équation $g(x)=0{,}05$ admet une unique solution $\alpha \in \left[0;\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}\right]$.

En utilisant la calculatrice, on obtient $0{,}08 < \alpha < 0{,}09$

• g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}\right]$, $g\left(\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}\right)=m \quad \simeq 0{,}12$ et $g(1)=0$

0,05∈[0;m], le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0,05 admet un unique antécédent $\beta \in \left[\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1};1\right]$ donc l'équation $g(x)=0{,}05$ admet une unique solution $\beta \in \left[\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1};1\right]$.

En utilisant la calculatrice on obtient $0{,}85 < \beta < 0{,}86$

• Conclusion

L'équation $g(x)=0{,}05$ admet deux solutions sur l'intervalle [0;1] : α et β avec α < β.

Partie B

1 . On choisit un pas de $0{,}01=\frac{1}{100}$. Cet algorithme calcule le nombre (compris entre 0 et 100) de nuances pour lesquelles la modification est perceptible visuellement.

2 . Pour la fonction f_2 :
Pour tout nombre réel x appartenant à [0;1]
$g(x)=f_2(x)-x$ et $E=|f_2(x)-x|$
Or, nous voyons en considérant le tableau de variations de g que pour tout $x\in[0;1]$, $g(x)\geqslant 0$ donc $\boxed{E(x)=g(x)}$
(f_2 est une fonction de retouche qui assombrit sur [0;1])

On veut $g(x)\geqslant 0{,}05$;
En considérant le tableau de variations de g, on obtient : $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$
$\frac{8}{100}<\alpha<\frac{9}{100}$ et $\frac{85}{100}<\beta<\frac{86}{100}$
donc, $\frac{9}{100}\leqslant x\leqslant\frac{85}{100}$.
Le nombre c affiché est le nombre d'entiers naturels appartenant à l'intervalle : [9;85] soit $85-9+1=77$
c=77

Partie C

remarque : Attention aux notations, car les fonctions notées f_1 et f_2 dans cette partie sont différentes de celles de la partie A.

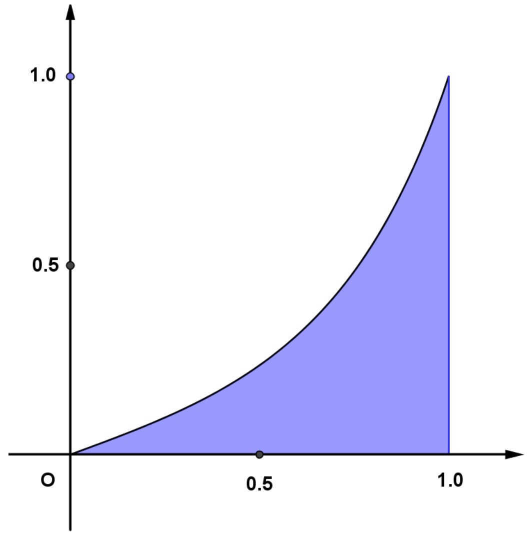
1 .a. Pour tout nombre réel $x\in[0;1]$, $f_1(x)=x\,e^{(x^2-1)}$
On admet que f_1 est une fonction de retouche donc $f_1(x)\geqslant 0$.
f_1 est continue et positive sur [0;1] donc l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe représentative de f_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est : $\mathscr{A}_1=\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

Rappel
Si $f(x)=u'(x)e^{u(x)}$, $x\in\mathbb{R}$ alors la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=e^{u(x)}$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$f_1(x)=x\,e^{(x^2-1)}$
$u(x)=x^2-1$ et $u'(x)=2x$
Donc, F_1, telle que $F_1(x)=\frac{1}{2}e^{(x^2-1)}$ est une primitive de f_1 sur [0;1].

$\mathscr{A}_1=F_1(1)-F_1(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times e^{-1}\ \mathrm{U;A}$.

(On donne une représentation graphique de f_1, non demandée, mais on peut facilement l'obtenir avec la calculatrice à l'examen)



b. Mêmes remarques pour la fonction f_2

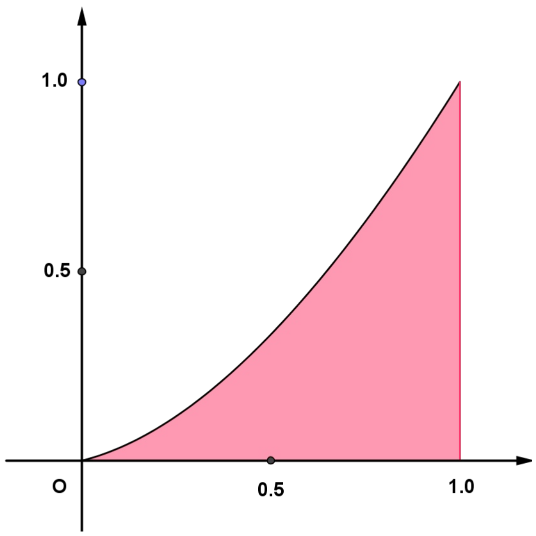
$\mathscr{A}_2 = \int_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x$

$x \in [0;1]$, $f_2(x) = 4x - 5 + \dfrac{60}{x+4}$

$F_2(x) = 2x^2 - 5x + 60\ln(x+4)$ est **une primitive** de f_2 sur $[0;1]$

$\mathscr{A}_2 = F_2(1) - F_1(0) = -3 + 60\ln 5 - 60\ln 4 = -3 + 60\ln\dfrac{5}{4}$ U.A.

Courbe représentative de f_2



2 . En utilisant la calculatrice on obtient :

$\mathscr{A}_1 \simeq 0{,}32$ et $\mathscr{A}_2 \simeq 0{,}39$

$0{,}32 < 0{,}39$

Conclusion

f_1 est **la fonction qui a pour effet d'éclaircir le plus l'image**.