Exercice 4 — Candidats n'ayant pas suivi la spécialité — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :
A(1;2;7), B(2;0;2), C(3;1;3), D(3 ;-6;1) et E(4 ;-8:-4)

1 . Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 . Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace, où b et c sont deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs de b et c telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x-2y+z-4=0$.

c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

3 . On considère la droite $\mathscr{D}$ de l'espace dont une représentation paramétrique est :
$\begin{cases} x=2t+3 \\ y=-4t+5 \\ z=2t-1 \end{cases}$ où t est un nombre réel.

a. La droite $\mathscr{D}$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

b. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC).

4 . Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Correction :

1 . A(1;2;7) B(2;0;2) C(3;1;3)

$\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ **ne sont pas colinéaires** donc les points A, B et C **ne sont pas alignés**.

2 . $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur de l'espace, b et c sont deux nombres réels.

a. $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si, $\vec{u}$ est **orthogonal à deux vecteurs non colinéaires** de (ABC).

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires de (ABC).

$\vec{AB}.\vec{u}=1\times 1+(-2)\times b+(-5)\times c=1-2b-5c$

$\vec{AC}.\vec{u}=2\times 1(-1)\times b+(-4)\times c=2-b-4c$

$\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{AB}.\vec{u}=0$ et $\vec{AC}.\vec{u}=0$

c'est à dire : $\begin{cases}1-2b-5c=0\\ 2-b-4c=0\end{cases}$

$\begin{cases}2b+5c=1\\ b+4c=2\end{cases}$

On obtient $-3c=-3$ soit $c=1$ et $b=-2$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal au plan (ABC)**.

b. $M(x;y;z)$ A(1;2;7) $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-7\end{pmatrix}$

$M\in(ABC) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{AM}=0 \Leftrightarrow 1\times(x-1)-2\times(y-2)+1\times(z-7)=0 \Leftrightarrow x-1-2y+4+z-7=0 \Leftrightarrow$ $x-2y+z-4=0$

(ABC) : **x-2y+z-4=0**

c. D(3 ;-6;1)

$3-2\times(-6)+1-4=3+12+1-4=12\neq 0$

donc **le point D n'appartient pas au plan (ABC)**.

3 .a. $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$

$\vec{v}$ **=2** $\vec{u}$ donc $\vec{v}$ est **un vecteur normal** au plan (ABC) et la droite $\mathscr{D}$ est **orthogonale au plan (ABC)**.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

b. On résout le système : $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=-4t+5 \\ z=2t-1 \\ x-2y+z-4=0 \end{cases}$

On obtient : $2t+3-2(-4t+5)+2t-1-4=0$

$2t+3+8t-10+2t-5=0$
$12t=12$
$t=1$

$x=2\times 1+3=$ **5**, $y=-4\times 1+5=$ **1**, $z=2\times 1-1=$ **1**

H(5;1;1)

4. D(3 ;-6;1) E(4 ;-8 ;-4) $\vec{DE}\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$

(DE) est **parallèle au plan** (ABC) si et seulement si $\vec{DE}.\vec{u}=0$

$\vec{DE}.\vec{u}=1\times 1+(-2)\times(-2)+(-5)\times 1=0$

Le point D n'appartient pas au plan (ABC).

Conclusion
La droite (DE) est strictement parallèle au plan (ABC).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés