Exercice 1 — 5 points

PARTIE A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x)=x+\mathrm{e}^{-x}$

1 . Justifier que $\mathscr{C}_1$ passe par le point A de coordonnées (0 ;1).

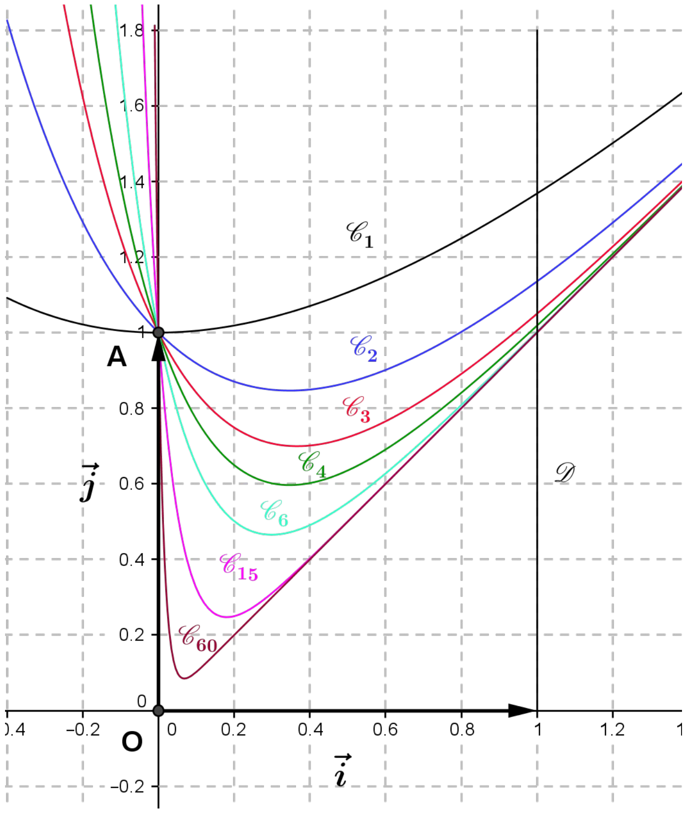
2 . Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1 . On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et $-\infty$.

PARTIE B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 (x+\mathrm{e}^{-nx})\,\mathrm{d}x$$

1 . Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x+\mathrm{e}^{-nx}$.
Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathscr{D}$ d'équation x=1.



a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n .

b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2 . Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1-e^x\right)dx$$

En déduire le signe de I_{n+1} - I_n puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3 . Déterminer l'expression de (I_n) en fonction de n et déterminer la limite de la suite ($I_{n.}$).

Correction :

PARTIE A

Pour tout nombre réel x, on a : $f_1(x)=x+e^x$

1 . $f_1(0)=0+e^0=\underline{1}$
donc $\mathscr{C}_1$ **passe par le point A(0 ;1)**.

2 . f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'_1(x)=1-e^{-x}$ car $(e^{-x})'=-e^{-x}$
$1-e^{-x}=0 \Leftrightarrow 1=e^{-x} \Leftrightarrow e^0=e^{-x} \Leftrightarrow 0=x$
$1-e^{-x}>0 \Leftrightarrow 1>e^{-x} \Leftrightarrow e^0>e^{-x} \Leftrightarrow 0>-x \Leftrightarrow 0<x$
$1-e^{-x}<0 \Leftrightarrow 0>x$

■ $\lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$

<u>conséquence</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

on a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty}$

■ $f_1(x)=e^{-x}\left[\dfrac{x}{e^{-x}}+1\right]=e^{-x}[xe^x+1]$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[xe^x+1]=1$
$\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$

<u>conséquence</u> $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=+\infty}$

On obtient **le tableau de variations suivant** :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

On a $f_1(0)=1$

PARTIE B

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 (x+e^{-nx})\,dx$$

1 . Pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x, $f_n(x)=x+e^{-nx}$

En particulier : $f_0(x) = x + e^0 = x+1$

a. Pour tout entier naturel n, f_n est continue et positive sur [0 ;1] donc I_n est **l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan** comprise entre la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x=0 et x=1.

b. En regardant le graphique, on peut effectuer les conjectures suivantes :

- Pour tout entier naturel n, $\mathscr{C}_{n+1}$ est en dessous de $\mathscr{C}_n$ donc la suite (I_n) est **décroissante**.

- Lorsque n est « très grand » $\mathscr{C}_n$ est très voisine du segment : y=x sur [0;1] et l'aire en dessous de ce segment est l'aire d'un triangle isocèle, cette aire est égale à $\frac{1}{2}$ donc la suite (I_n) **converge** vers : $\boxed{\frac{1}{2}}$.

2 . Pour tout entier naturel n, $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 (x+e^{-(n+1)x})\,dx - \int_0^1 (x+e^{-nx})\,dx$

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 [(x+e^{-(n+1)x})-(x+e^{nx})]\,dx = \int_0^1 (e^{-(n+1)x}-e^{-nx})\,dx$$

or $e^{-nx}=e^{-nx-x}\times e^x=e^{-(n+1)x}\times e^x$

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 (e^{-(n+1)x}-e^{-(n+1)x}\times e^x)\,dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1-e^x)\,dx$$

Pour tout nombre réel x compris entre 0 et 1, on a $e^x \geqslant e^0=1$ (car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$), donc $1- e^x \leqslant 0$.

On a aussi $e^{-(n+1)x} > 0$
et l'intégrale d'une fonction négative sur $[0;1]$ est négative.

conséquence :
Pour tout entier naturel n, on a $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \leqslant 0$ donc la suite (I_n) est **décroissante**.

I_n est l'intégrale d'une fonction positive sur [0;1] donc $\mathrm{I}_n \geqslant 0$
conclusion :
(I_n) est une suite décroissante et minorée par 0 donc (I_n) est **convergente**.

3 . Rappel
Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)= e^{ax}$ (a étant une constante non nulle) alors la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)= \frac{1}{a}e^{ax}$ est **une primitive de g sur $\mathbb{R}$**.

Pour tout entier naturel non nul n :

$f_n(x)=x+e^{-nx}$ et $F_n(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{n}e^{-nx}$

F_n est une primitive de f_n sur $\mathbb{R}$.

$$I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx=F_n(1)-F_n(0)$$

$$I_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}e^{-n}+\frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}e^{-n}=0$

conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n=\frac{1}{2}}$$