Exercice 2 5 points

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies.
Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1 . Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %.On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
On note M l'événement « la personne choisie est malade » et T l'événement « le test est positif » .

a. Traduire l'énoncé par un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité P(T) de l'événement T est égale à $1{,}989\times10^{-3}$

c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
Affirmation : « si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2 . Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95. on désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.
A partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Partie B

La chaîne de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1 . Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, de moyenne $\mu=900$ et d'écart type $\sigma=7$.

a. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2} .

b. Déterminer l'entier positif h tel que $P(900-h\leqslant X\leqslant 900+h)\simeq 0{,}99$ à 10^{-3} près.

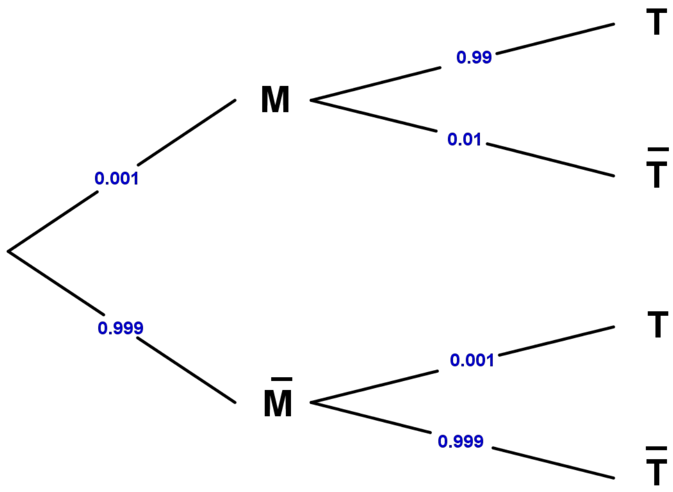
2 . La chaîne de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97 % de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages,on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise. Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.
Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ?
On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

Correction :

1 . L'énoncé précise :

- Le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est 0,1 %
  donc $P(M)=\underline{0{,}001}$ on déduit que $P(\bar{M})=1-0{,}001=\underline{0{,}999}$
- La probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99
  donc $P_M(T)=\underline{0{,}99}$ on déduit que $P_M(\bar{T})=1-0{,}99=\underline{0{,}01}$
- La probabilité qu'une personne saine présente un test positif est : 0,001
  donc $P_{\bar{M}}(T)=\underline{0{,}001}$ on déduit que $P_{\bar{M}}(\bar{T})=1-0{,}001=\underline{0{,}999}$

a. On obtient l'arbre pondéré suivant :



b. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales on a :

$P(T)=P(M\cap T)+P(\bar{M}\cap T)$
$P(T)=0{,}001\times 0{,}99+0{,}999\times 0{,}001=0{,}00099+0{,}000999=0{,}001989$

$P(T)=\boxed{1{,}989\times 10^{-3}}$

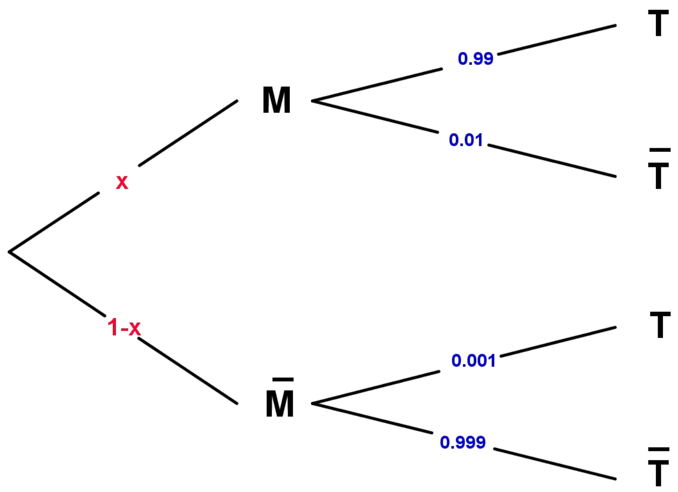
c. Affirmation : « si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade »

C'est à dire $P_T(M)<\frac{1}{2}$

On a $P_T(M)=\frac{P(M\cap T)}{P(T)}=\frac{0{,}00099}{0{,}001989}\simeq 0{,}498<0{,}5$

<u>L'affirmation est vraie</u>.

2 . On suppose $P(M)=x$ donc $P(\bar{M})=1-x$
On a encore $P_M(T)=\underline{0{,}99}$ et $P_{\bar{M}}(T)=\underline{0{,}001}$
On obtient l'arbre pondéré suivant :



$P(T)=0{,}99x+(1-x)\times 0{,}001=0{,}99x+0{,}001-0{,}001x=0{,}989x+0{,}001$
$P(M\cap T)=0{,}99x$
$P_T(M)=\dfrac{0{,}99x}{0{,}989x+0{,}001}$

<u>Remarque :</u> $0\leqslant x\leqslant 1$ et on veut déterminer x tel que : $P_T(M)\geqslant 0{,}95$

soit $\dfrac{0{,}99x}{0{,}989x+0{,}001}\geqslant 0{,}95$

Le dénominateur étant strictement positif, on obtient :
$0{,}99x\geqslant 0{,}95(0{,}989x+0{,}001)$
$0{,}99x-0{,}95\times 0{,}989x\geqslant 0{,}95\times 0{,}001$
$0{,}05045x\geqslant 0{,}00095$
$x\geqslant \dfrac{0{,}00095}{0{,}05045}=\dfrac{95}{5045}\simeq$ **0,0188**

<u>conclusion :</u>
Il faut **au moins 1,88 % de malades** dans la population, pour que la probabilité d'une personne testée positivement soit malade, soit supérieure ou égale à 0,95.

Partie B

1 . X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ de moyenne $\mu=900$ et d'écart type $\sigma=7$.

a. Le comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg, c'est à dire $890\leqslant X\leqslant 920$.
La calculatrice nous donne la probabilité à 10^{-2} près :
$P(890\leqslant X\leqslant 920)=0{,}92$

b. On doit déterminer l'entier naturel h tel que : $P(900-h\leqslant X\leqslant 900+h)=0{,}99$ (à 10^{-3} près)

X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ si et seulement si $Z=\dfrac{X-900}{\sigma}$ suit la loi normale centée et réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Rappel cours :
Z suit la loi normale centrée et réduite $\alpha\in]0;1[$
Détermination de u_α tel que : $P(-u_\alpha\leqslant Z\leqslant u_\alpha)=1-\alpha$
On a : pour α =0,01 $u_{0,01}$ =2,58 (à 10^{-3} près)
pour α =0,05 $u_{0,05}$ =1,96 (à 10^{-3} près)
Donc P(-2,58⩽ Z⩽2,58)=0,99

or, Z= $\frac{X-900}{7}$

-2,58⩽Z⩽2,58 ⇔ -2,58⩽ $\frac{X-900}{7}$ ⩽2,58 ⇔ $-2{,}58\times7$ +900⩽X⩽ $2{,}58\times7$ +900 ⇔ 881,94⩽X⩽918,06

On veut déterminer un entier naturel, on obtient : 882 ⩽ X ⩽ 918
Soit 900–18⩽X⩽900+18
et ***h*=18**
Vérification à la calculatrice : P(882⩽X⩽918)=0,990 (à 10^{-3} près)

2 . On extrait un comprimé
Succès S : « il est conforme » p=P(S)=**0,97**
Échec $\bar{S}$: « il n'est pas conforme » $q=1-p$=**0,03**
L'énoncé précise que l'on effectue 1000 tirages successifs indépendants (les tirages sont supposés avec remise).
On obtient un schéma de Bernoulli de paramètres : n=1000 et p=0,97.
On a bien $n=1000\geqslant30$ et $np=970\geqslant5$ et $nq=30\geqslant5$.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est donc :

$$I=\left[0{,}97-1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}97\times0{,}03}}{\sqrt{1000}};0{,}97+1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}97\times0{,}03}}{\sqrt{1000}}\right]$$

$$0{,}0105<1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}97\times0{,}03}}{\sqrt{1000}}<0{,}0106$$

donc $[0{,}9595;0{,}9805]\subset I\subset[0{,}9594;0{,}9806]$

La proportion de comprimés conformes dans l'échantillon est : $\frac{1000-53}{1000}$ =**0,947**

$0{,}947\notin[0{,}9594;0{,}9806]$ donc $0{,}947\notin I$

Ce contrôle remet en question les réglages fait par le laboratoire avec un risque d'erreur de 5 %.